

Sommaire

I- Orientation de l'espace

1-1/ Trièdre

1-2/ Bonhomme d'ampère - Repère orienté de l'espace

II- Produit vectoriel de Deux vecteur

2-1/ Définition du produit vectoriel

2-2/ Interprétation géométrique du produit vectoriel

III- Propriétés du produit vectoriel

3-1/ Anti-symétrie du produit vectoriel

3-2/ Bilinéarité du produit vectoriel

3-3/ Expression analytique du produit vectoriel

IV- Applications du produit vectoriel

4-1/ Aire d'un triangle

4-2/ Équation d'un plan défini par trois points non alignés

4-3/ Intersection de deux plans de l'espace

4-4/ Distance d'un point à une droite

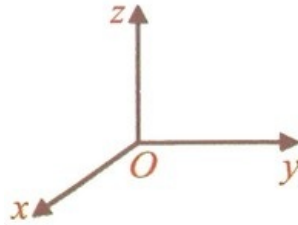
I- Orientation de l'espace

1-1/ Trièdre

Définition

Trois demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ de même origine O et non coplanaires déterminent, dans cet ordre un trièdre que l'on le note $(Ox; Oy; Oz)$.

$[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ sont appelées les arêtes du trièdre $(Ox; Oy; Oz)$



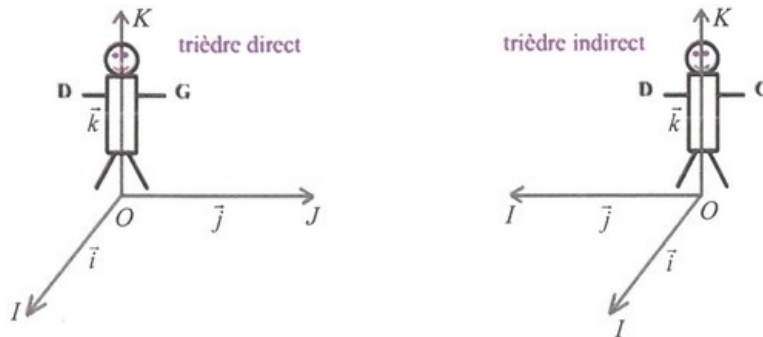
1-2/ Bonhomme d'ampère - Repère orienté de l'espace

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace \mathcal{E} .

On pose : $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $\vec{OK} = \vec{k}$.

- On dit que le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est direct lorsque le trièdre $([OI]; [OJ]; [OK])$ est direct.

- On dit que l'espace \mathcal{E} est orienté positivement lorsqu'il est muni d'un repère direct.



Proposition

Si le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormal direct, alors :

- 1) Les repères $(O; \vec{j}; \vec{k}; \vec{i})$ et $(O; \vec{k}; \vec{i}; \vec{j})$ sont directs.
- 2) Les repères $(O; \vec{j}; \vec{i}; \vec{k})$, $(O; \vec{k}; \vec{j}; \vec{i})$ et $(O; \vec{i}; \vec{k}; \vec{j})$ sont indirects.
- 3) Les repères $(O; -\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, $(O; \vec{i}; -\vec{j}; \vec{k})$ et $(O; \vec{i}; \vec{j}; -\vec{k})$ sont indirects.

Remarque

Soit O un point quelconque de l'espace \mathcal{E} . Alors :

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère direct \Leftrightarrow La base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est directe.

II- Produit vectoriel de Deux vecteur

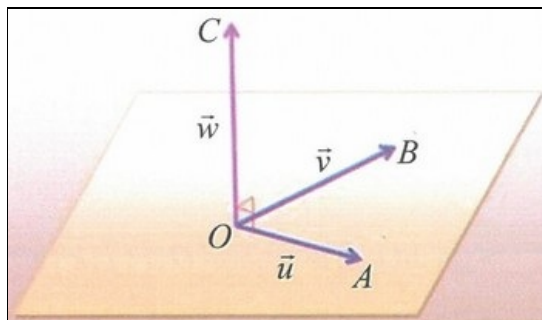
2-1/ Définition du produit vectoriel

Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace orienté tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$.

- Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, alors le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , dans cet ordre, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur $\vec{w} = \vec{OC}$ défini par :

- la droite (OC) est perpendiculaire au plan (OAB) ;
 - le trièdre $([OA]; [OB]; [OC])$ est direct ;
 - $\|\vec{OC}\| = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \sin \theta$ où $\theta = \widehat{AOB}$
- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$



Remarques

- Le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne dépend pas du choix du point O .
- Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur, tandis que le produit scalaire de deux vecteurs est un réel.
- Si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, alors $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$ et $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \left| \sin \left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}} \right) \right|$.
- Si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, alors la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est directe. En particulier, si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont unitaires et orthogonaux, alors $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une base orthonormée directe.
- Pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathcal{V}_3$: $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$
- Les points A , B et C de l'espace \mathcal{E} sont alignés si, et seulement si : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$

Applications

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace orienté tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 4$ et $\left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}} \right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

1) Calculer $\|\vec{v}\|$.

Soit \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs de l'espace orienté tels que $\|\vec{a}\| = 4$ et $\|\vec{b}\| = 9$ et $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18\sqrt{3}$.

2. Calculer $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$.

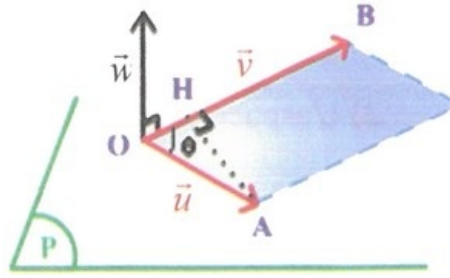
2-2/ Interprétation géométrique du produit vectoriel

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace orienté tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$ et $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Le réel $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les représentants \vec{OA} et \vec{OB} des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

En effet : $AH = OA \sin \theta = \|\vec{u}\| \times \left| \sin \left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}} \right) \right|$

Et l'aire du parallélogramme est : $OB \times AH = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \left| \sin \left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}} \right) \right|$



III- Propriétés du produit vectoriel

3-1/ Anti-symétrie du produit vectoriel

Proposition

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace orienté, on a : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$

On dit que le produit vectoriel est antisymétrique.

3-2/ Bilinearité du produit vectoriel

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace orienté et α un nombre réel.

Alors :

$$\boxed{1} \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$\boxed{2} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$

$$\boxed{3} \quad \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

On dit que le produit vectoriel est bilinéaire.

3-3/ Expression analytique du produit vectoriel

L'espace \mathcal{V}_3 est rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 .

Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Applications

On considère les vecteurs : $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{w} = \vec{j} + \vec{k}$

- Déterminer, dans la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, les coordonnées de chacun des vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{w}$.

Dans l'espace \mathcal{E} rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points :

$$A(1; 2; 3) ; B(0; -1; 2) ; C(3; -2; 1)$$

- Calculer $\vec{OA} \wedge \vec{BC}$ et $\vec{AB} \wedge \vec{BC}$.

IV- Applications du produit vectoriel

4-1/ Aire d'un triangle

Proposition

Soit A , B et C trois points non alignés de l'espace orienté \mathcal{E} .

L'aire du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

Applications

- Calculer l'aire du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} \quad A(-1; 2; 1) ; B(-1; 0; 2) ; C(2; -1; 0)$$

$$\boxed{2} \quad A(2; 1; -1) ; B(0; 4; 1) ; C(3; 1; -2)$$

4-2/ Équation d'un plan défini par trois points non alignés

Proposition

Soit A , B et C trois points non alignés de l'espace orienté \mathcal{E} .

On a : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

Applications

On considère les deux points $E(3; -1; 1)$ et $F(1; 0; 3)$.

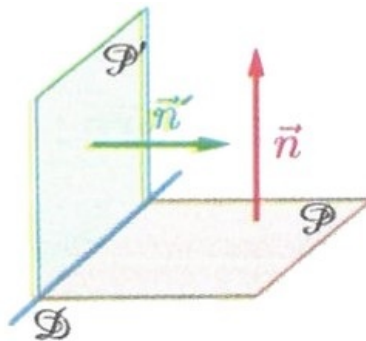
- Déterminer une équation cartésienne du plan (OEF) .

4-3/ Intersection de deux plans de l'espace

Proposition

Soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans sécants suivant une droite \mathcal{D} dans l'espace orienté .

Si \vec{n} est un vecteur normal de \mathcal{P} et \vec{n}' est un vecteur normal de \mathcal{P}' , alors $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection \mathcal{D} .



Applications

- Déterminer l'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} \quad \mathcal{P} : x - y + 2z + 3 = 0 \text{ et } \mathcal{P}' : x + 2y + 2z - 1 = 0$$

$$\boxed{2} \quad \mathcal{P} : 3x - 4y + 5z + 7 = 0 \text{ et } \mathcal{P}' : 2x - 3y - z - 4 = 0$$

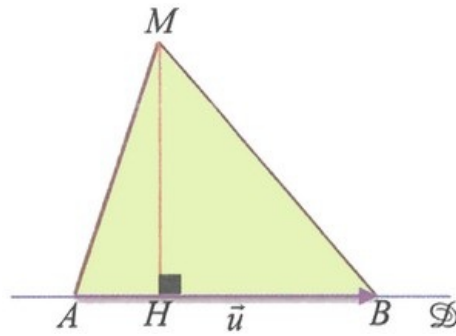
4-4/ Distance d'un point à une droite

Proposition

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit \mathcal{D} la droite passant par A et dirigée par le vecteur \vec{u} .

La distance d'un point M de l'espace à la droite \mathcal{D} est donnée par : $d(M; \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$



Applications

1. Calculer la distance du point M à la droite \mathcal{D} dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} \quad M(3; 2; 1) \text{ et } \mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{2} \quad M(3; -1; 1) \text{ et } \mathcal{D} : \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$