AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 17-1 : Produit scalaire dans l'espace (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Produit scalaire dans l'espace

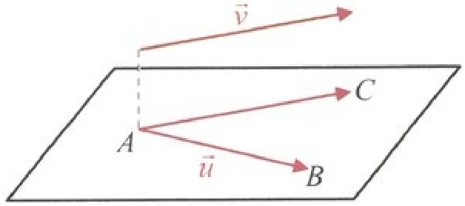
1-1/ Définitions et notations

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC) si A, B et C ne sont pas alignés, ou dans tout plan comprenant A, B et C, on le note : $\vec{u}\,.\,\vec{v}$

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on convient que : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

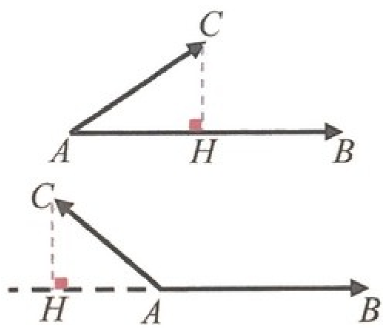


Remarques

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$, cela correspond au cas où l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est aigu.

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens contraires, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$, cela correspond au cas où l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est obtus.



Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent valables dans l'espace.

Applications

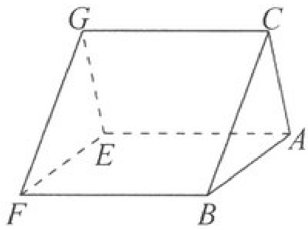
Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AE = 5$, $AB = 8$ et $AD = 6$.

1. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HF}$; $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DG}$

Soit $ABCEFG$ un prisme droit tel que le triangle ABC est rectangle en A.

On suppose que $AC = 3$ et $AB = 4$ et $AE = 8$.

2. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{EG}$



1-2/ Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace sont orthogonaux si $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}=0$.

On écrit : $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$

1-3/ Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$ et k un nombre réel.

On a les propriétés suivantes :

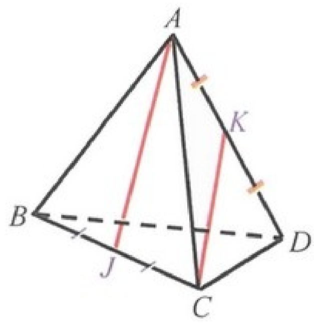
$$\boxed{1}\ \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{u}$$
$$\boxed{2}\ \left(k\overrightarrow{u}\right).\,\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\,.\left(k\overrightarrow{v}\right)=k\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\right)$$
$$\boxed{3}\ \overrightarrow{u}\,.\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{w}$$

On dit que le produit scalaire est une opération symétrique et bilinéaire.

Applications

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier dont toutes les arêtes ont la même longueur a.

Soit J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AD]$:



1. Calculer $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$, puis en déduire $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$, et en déduire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{CK}$ en fonction de a.

1-4/ Norme d'un vecteur de l'espace

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace.

Le produit scalaires $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}$ s'appelle le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$, et se note $\overrightarrow{u}^2$.

Le nombre réel positif $\sqrt{\overrightarrow{u}^2}$ est appelé la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$, et on écrit : $||\overrightarrow{u}||=\sqrt{\overrightarrow{u}^2}$

Remarque

En posant $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$, on a : $\overrightarrow{u}^2=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=||\overrightarrow{AB}||^2$

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$ et k un nombre réel.

On a :

1) $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

2) $||k.\overrightarrow{u}|| = |k|.||\overrightarrow{u}||$

3) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$

4) Inégalité triangulaire : $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$

5) Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right| \leq ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$

6) Identités remarquables :

$$||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$
$$||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$
$$||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 = \left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right).\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)$$

II- Étude analytique du produit scalaire

2-1/ Base orthonormale - Repère orthonormal

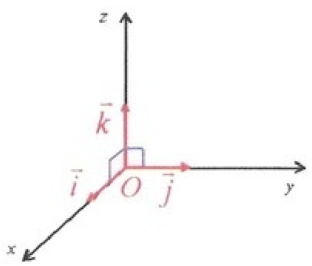
Définition

Soit $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$.

- On dit que la base $\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormale (ou orthonormée) lorsque :

$$\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{k} = 0 \text{ et } ||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$$

- On dit que le repère $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormal (ou orthonormé) lorsque la base $\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormale.



2-2/ Expression analytique du produit scalaire

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$.

Si $\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$, alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$ et $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Soit $A\,(x_A;y_A;z_A)$ et $B\,(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace $\mathscr{E}$.

Alors : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}$

Applications

On considère les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{w} = (4-3m)\vec{i} + 5\vec{j} + (1-m)\vec{k}$ $(m \in \mathbb{R})$.

1. a- Calculer : $\vec{u}\,.\,\vec{v}$; $\vec{u}\,.\,\vec{w}$; $\vec{v}\,.\,\vec{w}$; $||\vec{u}||$; $||\vec{v}||$
1. b- Déterminer la valeur de réel m pour laquelle $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
1. c- Calculer $\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = AE = 2$ et $AD = 4$.

Soit I le centre du carré $ABFE$ et J le milieu du segment $[EH]$.

2. a- Vérifier que le repère $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}; \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ est orthonormé.
2. b- Déterminer, dans ce repère, les coordonnées des points I, J et G.
2. c- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JG}$ et les distances JI et JG.

2-3/ Ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} = k$

Proposition

Soit $\vec{u}\,(a;b;c)$ un vecteur non nul de l'espace $\mathscr{V}_3$, A un point et k un nombre réel.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} = k$ est un plan dont une équation cartésienne est de la forme :

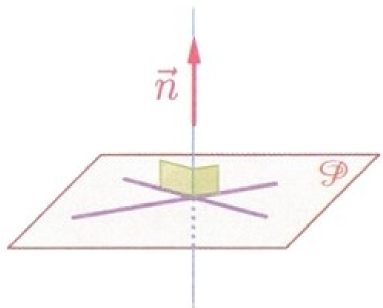
$$ax + by + cz + d = 0$$

III- Plan défini par un point et un vecteur normal

3-1/ Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace est normal à un plan $\mathscr{P}$ lorsque toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.



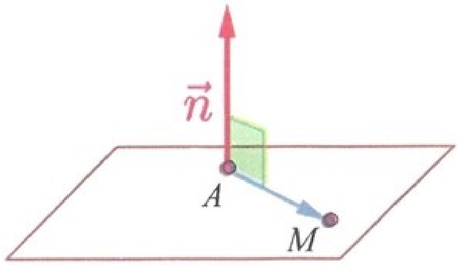
3-2/ Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Proposition

Soit a,b, c et d des nombres réels tels que $(a;b;c) \neq (0;0;0)$.

- Un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a;b;c)$ a une équation cartésienne de la forme :
$ax + by + cz + d = 0$

- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\,(a;b;c)$.



Applications

1. Déterminer un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ \mathscr{P}\ :\ 2x-y+8z-1=0$$
$$\boxed{2}\ \mathscr{P}\ :\ 3x-2z+10=0$$
$$\boxed{3}\ \mathscr{P}\ :\ 2y+3=0$$

2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ passant par $B\,(-1;0;3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(2;-3;4)$.

On considère les points $A\,(1;-1;1)$, $B\,(0;2;-1)$ et $C\,(-1;1;0)$.

3. a- Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. b- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(1;3;4)$ est normal au plan (ABC).

3-3/ Parallélisme et orthogonalité

Proposition

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' deux plans et $\mathscr{D}$ une droite dans l'espace.

Soit $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ deux vecteurs normaux respectivement à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$', et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

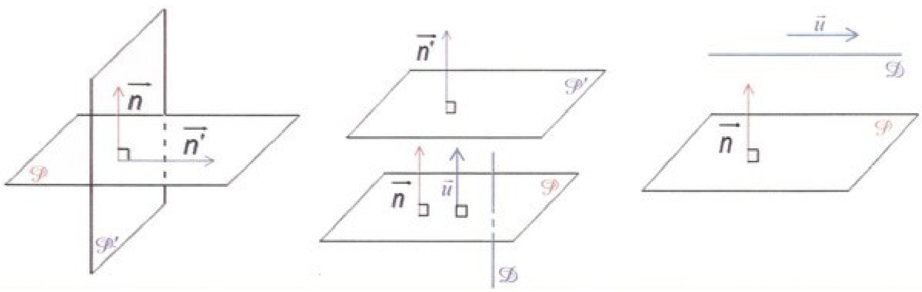
Alors :

1) Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.

2) Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' sont orthogonaux si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.

3) La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.

4) La droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.



Applications

On considère les deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ définis par les équations cartésiennes :

$$\mathscr{P} \;:\; 2x - 3y + z + 1 = 0$$
$$\mathscr{Q} \;:\; (m-1)x + 2y + (2m-3)z + 7 = 0$$

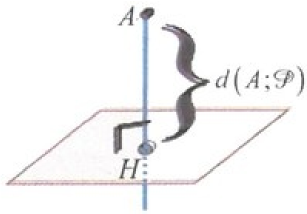
1. Déterminer la valeur de m qui pour laquelle les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont orthogonaux.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$' passant par $A(-1;-1;0)$ et parallèle au plan $\mathscr{P}$.

3-4/ Distance d'un point à un plan de l'espace

Définition

Soit $\mathscr{P}$ un plan et A un point de l'espace.

La distance du point A au plan $\mathscr{P}$, notée $d(A;\mathscr{P})$, est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$: $d(A;\mathscr{P}) = AH$



La distance du point $A(x_A;y_A;z_A)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ est donnée par la formule suivante :

$$d(A;\mathscr{P}) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Applications

On considère les plans $\mathscr{P} \;:\; x+y-z+1=0$ et $\mathscr{Q} \;:\; 2x+y+2z-3=0$.

1. a- Calculer $d(A;\mathscr{P})$ et $d(A;\mathscr{Q})$ sachant que $A(2;1;-1)$.
1. b- Déterminer l'ensemble des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $d(M;\mathscr{P}) = d(M;\mathscr{Q})$.

On considère les points $A(1;-1;2)$ et $B(2;0;1)$, et les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ donnés par les équations :

$$\mathscr{P} \;:\; x+y-z-1=0 \text{ et } \mathscr{Q} \;:\; 2x+y-z+1=0$$

2. a- Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.
2. b- Montrer que le point $H(2;0;1)$ est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.
2. c- Calculer $d(A;\mathscr{Q})$. Que peut-en déduire ?

On considère dans l'espace $\mathscr{E}$ le point $A(-1;1;1)$ et plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x-y+z-2=0$

3. a- Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

Pour tout réel m, on pose : $\mathscr{Q}_m = \left\{ M \in \mathscr{E} / \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AH} = m \right\}$

3. b- Déterminer analytiquement l'ensemble $\mathscr{Q}_m$.
3. c- Déterminer m tel que $d(A;\mathscr{Q}_m) = d(A;\mathscr{P})$

IV- La sphère dans l'espace

4-1/ Définition

Définition

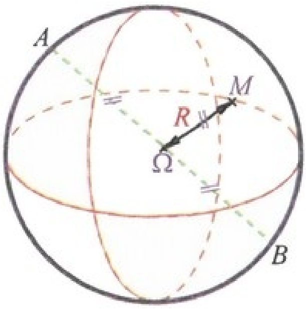
Soit Ω un point de l'espace et R un réel positif.

La sphère $\mathscr{S}$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\Omega M = R$

On la note : $S(\Omega; R)$

Soit A et B deux points de la sphère $\mathscr{S}$.

Le segment $[AB]$ est appelé diamètre de la sphère $\mathscr{S}$ lorsque le centre Ω de la sphère $\mathscr{S}$ est le milieu du segment $[AB]$.



4-2/ Équation cartésienne d'une sphère

Proposition

Soit R un réel positif et $\Omega(a; b; c)$ un point de l'espace.

Une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de centre Ω et de rayon R est donnée par :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Applications

1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de centre Ω et de rayon R dans les cas suivants :

$$\boxed{1}\ \Omega(2; 0; -1) \text{ et } R = \sqrt{2}$$
$$\boxed{2}\ \Omega(-3; 1; -2) \text{ et } R = \frac{3}{2}$$

4-3/ Représentation paramétrique d'une sphère

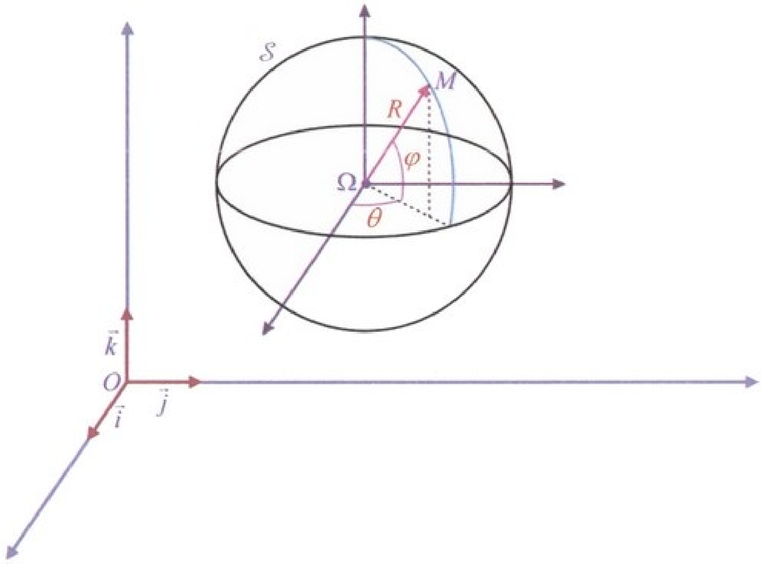
Proposition

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R.

Le point $M(x; y; z)$ appartient à la sphère $\mathscr{S}$ si, est seulement si :

$$\begin{cases} x = a + R\sin\varphi.\cos\theta \\ y = b + R\sin\varphi.\sin\theta \quad (\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = c + R\cos\varphi \end{cases}$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique de la sphère $\mathscr{S}$.



Applications

1. Déterminer une représentation paramétrique de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$.

4-4/ Ensemble des points $M\,(x;y;z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Proposition

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que :

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

où a, b, c et d des nombres réels.

1) Si $a^2+b^2+c^2-d>0$, alors $\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega\,(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

2) Si $a^2+b^2+c^2-d=0$, alors : $\mathscr{S}=\{\Omega\,(a;b;c)\}$

3) Si $a^2+b^2+c^2-d<0$, alors : $\mathscr{S}=\emptyset$

4-4/ Ensemble des points $M\,(x;y;z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Applications

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace $\mathscr{E}$ dans chacun des cas suivants :

$$\begin{gathered}\mathscr{S}_1\ :\ x^2+y^2+z^2-4x+6y=0\\ \mathscr{S}_2\ :\ x^2+y^2+z^2+x-3y+4z+\frac{13}{2}=0\\ \mathscr{S}_3\ :\ x^2+y^2+z^2-x-3y+2z-\frac{7}{2}=0\\ \mathscr{S}_4\ :\ x^2+y^2+z^2+x-3y-2z+9=0\end{gathered}$$

4-5/ Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Proposition

Soit A et B deux points distincts de l'espace $\mathscr{E}$.

1) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$
.

2) Une équation cartésienne de la sphère est donnée par :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

Applications

On Applications considère dans l'espace $\mathscr{E}$ les points suivants :

$$A(2;0;1) \;\; ; \;\; B(1;-1;1) \;\; ; \;\; C(0;0;-1)$$

1. a- Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.
1. b- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$. Que peut-en déduire ?
2. a- Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[AC]$.
2. b- En déduire le centre et le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.

4-6/ Intersection d'une sphère et d'une droite

Proposition

Soit $\mathscr{S}(\Omega; R)$ une sphère et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace $\mathscr{E}$.

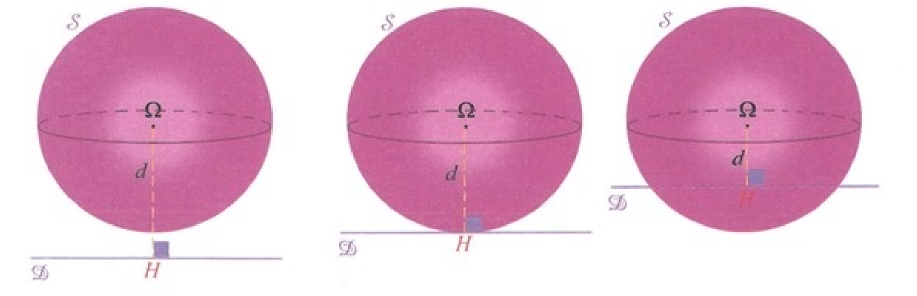
On désigne par d la distance du point Ω à la droite $\mathscr{D}$, et H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{D}$.

On a les propriétés suivantes :

1) Si $d > R$, alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{S} = \emptyset$. On dit que la droite $\mathscr{D}$ est à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S}$.

2) Si $d = R$, alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{S} = \{H\}$. On dit que la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la sphère $\mathscr{S}$ au point H.

3) Si $d < R$, alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{S} = \{A, B\}$. On dit que la droite $\mathscr{D}$ est perce la sphère $\mathscr{S}$ aux points A et B.



$\mathscr{D}$ est à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S}$ $\mathscr{D}$ est tangente à la sphère $\mathscr{S}$ $\mathscr{D}$ perce la sphère $\mathscr{S}$ en deux points

4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit $\mathscr{S}(\Omega; R)$ une sphère et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace $\mathscr{E}$.

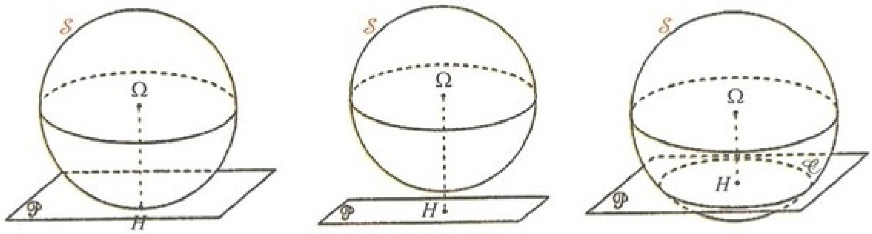
On désigne par d la distance du point Ω au plan $\mathscr{P}$, et H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{P}$.

On a les propriétés suivantes :

1) Si $d > R$, alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S} = \emptyset$. On dit que le plan $\mathscr{P}$ est à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S}$.

2) Si $d = R$, alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S} = \{H\}$. On dit que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère $\mathscr{S}$ au point H.

3) Si $d < R$, alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S} = \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est le cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. On dit que le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ selon le cercle $\mathscr{C}\left(H; \sqrt{R^2 - d^2}\right)$.



$\mathscr{P}$ est tangente à la sphère $\mathscr{S}$ $\quad$ $\mathscr{P}$ est à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S}$ $\quad$ $\mathscr{P}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ suivant un cercle $\mathscr{C}$

Applications

1. Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ \mathscr{S}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0 \text{ et } \mathscr{P}\ :\ x - 2y + 2z - 3 = 0$$

$$\boxed{2}\ \mathscr{S}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0 \text{ et } \mathscr{P}\ :\ x - 2y + 2z - 3 = 0$$

$$\boxed{3}\ \mathscr{S}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 7 = 0 \text{ et } \mathscr{P}\ :\ x + y + z - 4 = 0$$

$$\boxed{4}\ \mathscr{S}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0 \text{ et } \mathscr{P}\ :\ x - 2y + 2z + 1 = 0$$

$$\boxed{5}\ \mathscr{S}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0 \text{ et } \mathscr{P}\ :\ 2x + y + z = 0$$

2. Donner une équation de la sphère de centre $\Omega\,(-1; 2; 3)$ et tangente au plan $\mathscr{P}$ d'équation : $x - 2y + 2z + 1 = 0$

4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

Proposition

Soit $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et soit $A \in \mathscr{S}$.

Il existe un seul plan $\mathscr{P}$ tangent à la sphère $\mathscr{S}$ en A, il est défini par :

$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$M(x; y; z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (x_\Omega - x_A)(x - x_A) + (y_\Omega - y_A)(y - y_A) + (z_\Omega - z_A)(z - z_A) = 0$$