

### Sommaire

#### I- Vecteurs de l'espace

1-1/ Notion de vecteur dans l'espace

1-2/ Addition vectorielle dans l'espace

1-3/ Multiplication d'un vecteur par un réel

#### II- Vecteurs colinéaires - Droites de l'espace

2-1/ Colinéarité de deux vecteurs

2-2/ Définition vectorielle d'une droite de l'espace

#### III- Définition sectorielle d'un plan - Vecteurs coplanaires

3-1/ Définition vectorielle d'un plan de l'espace

3-2/ Vecteurs coplanaires

#### IV- Parallélisme dans l'espace

4-1/ Droites parallèles dans l'espace

4-2/ Droites et plans parallèles dans l'espace

4-3/ Plans parallèles dans l'espace

---

#### I- Vecteurs de l'espace

1-1/ Notion de vecteur dans l'espace

##### **Définition**

Soit  $A$  et  $B$  deux points de l'espace.

- Si  $A \neq B$ , alors le bipoint  $(A; B)$  détermine un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  d'origine  $A$  et d'extrémité  $B$  tel que :

- Sa direction est celle de la droite  $(AB)$  de l'espace ;
- Son sens est de  $A$  vers  $B$  ;
- Sa norme, notée  $|\overrightarrow{AB}|$ , est la longueur du segment  $[AB]$ , et on écrit :  $|\overrightarrow{AB}| = AB$



- Si  $A = B$ , alors le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est appelée le vecteur nul qu'on le note  $\vec{0}$ , et on écrit :  
 $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

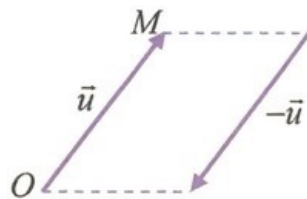
### Remarques

- Soit  $O$  un point de l'espace.

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace, il existe un unique point  $M$  de l'espace tel que :  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

- L'ensemble de tous les vecteurs de l'espace est noté  $\mathcal{V}_3$ .

- Le vecteur  $-\vec{u}$  est le vecteur de même direction, de même norme que  $\vec{u}$ , mais de sens contraire :



- Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

- Dire que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  signifie que  $ABDC$  est un parallélogramme, c'est-à-dire que les segments  $[AD]$  et  $[BC]$  ont le même milieu. Les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

### Applications

Soit  $ABCDEFGH$  un parallélépipède rectangle.

1. a- Construire les points  $I$  et  $J$  tels que  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AC}$ .

Soit  $O$  et  $O'$  respectivement les centres des parallélogrammes  $ABCD$  et  $EFGH$ .

1. b- Montrer que  $AOGO'$  est un parallélogramme.

Soit  $ABCD$  un tétraèdre.

2. a- Construire le point  $E$  tel que :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$
2. b- Construire le point  $F$  symétrique du point  $C$  par rapport au point  $A$ , puis montrer que  $FAEB$  est un parallélogramme.
2. c- Construire les points  $H$  et  $K$  tels que  $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{BD}$ .

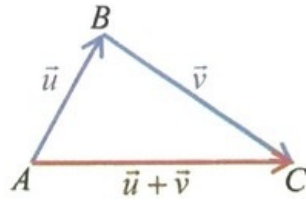
## 1-2/ Addition vectorielle dans l'espace

### Définition

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace  $\mathcal{V}_3$ .

On pose :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ .

La somme des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur  $\overrightarrow{AC}$ , et on écrit :  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



## Proposition

- 1) Pour tous points  $M$ ,  $N$  et  $P$  de l'espace, on a :  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$  (Relation de Chasles).
- 2) Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace  $\mathcal{V}_3$ , on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u} \\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \\ \vec{u} + \vec{0} &= \vec{u} \\ \vec{u} + (-\vec{u}) &= \vec{0}\end{aligned}$$

## Applications

Soit  $ABCD A'B'C'D'$  un cube.

1. Déterminer les points  $M$  et  $N$  sachant que :

$$\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{B'D} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{A'N} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'A}$$

Soit  $ABCD$  un tétraèdre,  $H$  le milieu du segment  $[BC]$  et  $K$  le milieu du segment  $[AD]$ .

2. Montrer que :  $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{HK}$

Soit  $ABCDEFGH$  un parallélépipède rectangle,  $I$  le milieu de  $[AD]$  et  $J$  le milieu de  $[EG]$ .

3. a- Montrer que  $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$  et  $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EC}$ .
3. b- Déterminer le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{IM}$ .

## 1-3/ Multiplication d'un vecteur par un réel

### Définition

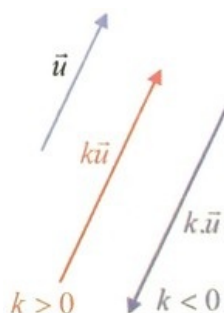
Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul et  $k$  un réel non nul.

Le produit du vecteur  $\vec{u}$  par le réel  $k$  est le vecteur  $\vec{v}$  noté  $k \cdot \vec{u}$ , ou simplement  $k\vec{u}$ , et qui vérifie les conditions suivantes :

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont la même direction ;
- $\vec{v}$  a le même sens que celui de  $\vec{u}$  si  $k > 0$ , et de sens contraire de  $\vec{u}$  si  $k < 0$ .
- $\|\vec{v}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

On écrit :  $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  et tout réel  $k$ , on pose  $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$  et  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .



## Proposition

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace  $\mathcal{V}_3$  et pour tout réels  $\alpha$  et  $\beta$ , on a :

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & \alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \\ \boxed{2} \quad & (\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \\ \boxed{3} \quad & 1. \vec{u} = \vec{u} \\ \boxed{4} \quad & \alpha (\beta \vec{u}) = \alpha \beta \vec{u} \\ \boxed{5} \quad & \alpha \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}) \end{aligned}$$

## Remarques

- Aux règles de calcul citées dans la proposition précédente s'ajoutent les règles suivantes :

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace, et pour tout réels  $\alpha$  et  $\beta$ , on a :

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & \alpha (\vec{u} - \vec{v}) = \alpha \vec{u} - \alpha \vec{v} \\ \boxed{2} \quad & (\alpha - \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} - \beta \vec{u} \\ \boxed{3} \quad & -1. \vec{u} = -\vec{u} \\ \boxed{4} \quad & \alpha (-\beta \vec{u}) = (-\alpha) (\beta \vec{u}) = -\alpha \beta \vec{u} \end{aligned}$$

- Si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont trois vecteurs de l'espace  $\mathcal{V}_3$ , alors :  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{w} - \vec{u}$

- Soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe et  $k$  un réel non nul. Alors :

$\vec{AB} = k. \vec{CD}$  si et seulement si,  $ABCD$  ou  $ABDC$  est un trapèze de bases  $[AB]$  et  $[CD]$  avec :  $AB = |k|CD$

## II- Vecteurs colinéaires - Droites de l'espace

### 2-1/ Colinéarité de deux vecteurs

#### Définition

On dit que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace  $\mathcal{V}_3$  sont colinéaires s'il existe un réel  $k$  tel que :

$$\vec{v} = k. \vec{u} \text{ ou } \vec{u} = k. \vec{v}$$

#### Remarques

- Le vecteur nul  $\vec{0}$  est colinéaire avec tout vecteur de l'espace  $\mathcal{V}_3$ .

- On considère deux vecteurs non nuls  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{u}' = \vec{A'B'}$ .

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires si, et seulement si :  $(AB) // (A'B')$

- Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires, c'est-à-dire : il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que :  $\vec{AC} = k. \vec{AB}$

#### Applications

Soit  $ABCDEFGH$  un cube.

On considère les points  $I$ ,  $N$  et  $P$  définis par :

$$\vec{AP} = \frac{1}{5} \vec{AD} ; \vec{NA} + \vec{NE} = \vec{0} ; \vec{BI} = \frac{2}{5} \vec{BC}$$

1. a- Montrer que les vecteurs  $\vec{IF}$  et  $\vec{NP}$  sont colinéaires.

Soit  $J$  le symétrique du point  $B$  par rapport à  $A$ .

1. b- Montrer que les points  $I$ ,  $J$  et  $P$  sont alignés.

Soit  $ABCDEFGH$  un parallélépipède rectangle.

2. a- Construire les points  $K$ ,  $L$  et  $M$  défini par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{EL} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{HF} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

2. b- Montrer que les points  $K$ ,  $L$  et  $M$  sont alignés.

### Proposition

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace  $\mathcal{V}_3$  et  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ .

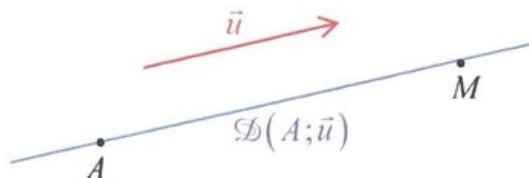
- 1) Si  $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$  et  $(a; b) \neq (0; 0)$ , alors les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- 2) Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, alors pour tout  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  :  
 $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow a = b = 0$

### 2-2/ Définition vectorielle d'une droite de l'espace

Soit  $A$  un point de l'espace et  $\vec{u}$  un vecteur non nul de  $\mathcal{V}_3$ .

L'ensemble de points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$  où  $k \in \mathbb{R}$ , est la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

Cette droite est notée :  $\mathcal{D}(A; \vec{u})$



### Remarques

- On a :  $\mathcal{D}(A; \vec{u}) = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} ; k \in \mathbb{R} \right\}$

Soit  $\mathcal{D}$  une droite de l'espace  $\mathcal{E}$  et  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

- Si  $A$  et  $B$  sont deux points de la droite  $\mathcal{D}$ , alors :  $\mathcal{D}(A; \vec{u}) = \mathcal{D}(B; \vec{u})$
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  :  $\mathcal{D}(A; \vec{u}) = \mathcal{D}(A; \lambda\vec{u})$

- Si  $A$  et  $B$  sont deux points distincts de l'espace  $\mathcal{E}$ , alors :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \left\{ (\exists k \in \mathbb{R}) ; \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \right\}$$

## III- Définition sectorielle d'un plan - Vecteurs coplanaires

### 3-1/ Définition vectorielle d'un plan de l'espace

#### Théorème

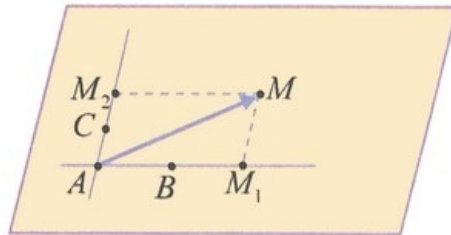
- Tout plan de l'espace est déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires appelés vecteurs directeurs de ce plan.

- Soit  $A$  un point de l'espace et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble  $\mathcal{P}$  des points  $M$  de l'espace  $\mathcal{E}$  tels que  $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$  avec  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  est le plan passant par  $A$  et dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

On le note  $\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v})$ , et on écrit :

$$\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v}) = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} ; (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$



## Remarques

- Soit  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés de l'espace.

On a Pour tout point  $M$  de l'espace :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \left[ (\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2); \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \right]$$

- Soit  $\mathcal{P}$  le plan passant par  $A$  et dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Alors, pour tout  $E \in \mathcal{P}$  et pour tout  $(\lambda; \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$ , on a :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(E; \vec{u}; \vec{v}) = \mathcal{P}(E; \lambda \vec{u}; \mu \vec{v})$$

## Applications

Soit  $ABCDEFGH$  un cube.

On pose :  $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{FG}$

- Déterminer les plans  $\mathcal{P}(C; \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v}; \vec{w})$  et  $\mathcal{P}(E; \vec{u} - \vec{v}; v + \vec{w})$ .

Soit  $ABCDEFGH$  un cube.

$I, J$  et  $O$  sont respectivement les milieux des segments  $[BC]$ ,  $[AE]$  et  $[CF]$ .

2) Déterminer les plans suivants :

$$\mathcal{P}(O; \overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{EH}) ; \mathcal{P}(I; \overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{CG}) ; \mathcal{P}(J; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{DH})$$

On considère les points  $I, N$  et  $P$  définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NE} = \vec{0} ; \overrightarrow{BI} = \frac{2}{5} \overrightarrow{BC}$$

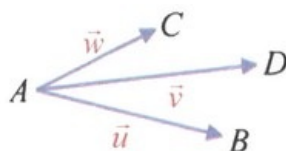
## 3-2/ Vecteurs coplanaires

### Définition

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\mathcal{V}_3$ .

On dit que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires, s'il existe quatre points coplanaires  $A, B, C$  et  $D$  appartenant à un même plan tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{AC} \text{ et } \vec{w} = \overrightarrow{AD}$$



## Remarques

- Le vecteur nul est coplanaire avec deux vecteurs quelconques de l'espace  $\mathcal{V}_3$ .
- Si deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, alors pour tout vecteur  $\vec{w}$  de l'espace  $\mathcal{V}_3$ , les trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.
- Si  $ABCD$  est tétraèdre, alors les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  ne sont pas coplanaires.

## Proposition

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires et  $\vec{w}$  un vecteur de l'espace.

Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

## Remarques

Soit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $M$  quatre points de l'espace.

S'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}$ , alors les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $M$  sont coplanaires.

## Applications

Soit  $ABCDEFGH$  un parallélépipède rectangle.

1. Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{FD}$ ,  $2\overrightarrow{BD}$  et  $2\overrightarrow{EA}$  sont coplanaires.
  2. Les vecteurs  $\frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{EH}$  sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.
- On pose :  $\vec{u} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CF}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}$ .
3. Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont-ils coplanaires ?

## IV- Parallélisme dans l'espace

### 4-1/ Droites parallèles dans l'espace

#### Proposition

Soit  $A$  et  $A'$  deux points de l'espace et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs non nuls.

Les droites  $\mathcal{D}(A; \vec{u})$  et  $\mathcal{D}(A'; \vec{v})$  sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

#### Application

Soit  $ABCD$  un tétraèdre.

Les points  $M$  et  $N$  sont respectivement les milieux des segments  $[AC]$  et  $[AD]$ .

Soit  $K$  le point de l'espace vérifiant la relation :  $2\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$

1. Montrer que  $(MN) // (BK)$ , puis que les droites  $(KN)$  et  $(BM)$  sont sécantes.

## 4-2/ Droites et plans parallèles dans l'espace

### Proposition

Soit  $\mathcal{D}$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$ , et  $\mathcal{P}$  un plan de vecteurs directeurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

Pour que la droite  $\mathcal{D}$  soit parallèle au plan  $\mathcal{P}$ , il faut et il suffit que les trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  soient coplanaires.

Autrement dit :  $\mathcal{D} // \mathcal{P} \Leftrightarrow \left[ \exists ((a; b) \in \mathbb{R}^2) ; \vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \right]$

### Application

Soit  $ABCDEFGH$  un cube.

$K$  et  $L$  sont respectivement les milieux des segments  $[BC]$  et  $[AD]$ .

Le point  $M$  est le centre de gravité de  $BCD$ , et le point  $N$  est le centre de gravité de  $FGH$ .

Soit  $S$  un point du segment  $[MN]$ .

1. Montrer que la droite  $(KS)$  est parallèle au plan  $(BFL)$ .

## 4-3/ Plans parallèles dans l'espace

### Proposition

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et  $\mathcal{P}'$  un plan de vecteurs directeurs  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$ .

.

Pour que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  soient parallèles, il faut et il suffit que :

$(\vec{u}, \vec{u}' \text{ et } \vec{v} \text{ soient coplanaires}) \text{ et } (\vec{u}, \vec{u}' \text{ et } \vec{v}' \text{ soient coplanaires})$

### Applications

Soit  $ABCD$  un tétraèdre.

On considère les points  $E$ ,  $F$  et  $G$  tels que :

$$\vec{AE} = \frac{4}{3}\vec{AB} ; \vec{DG} = \frac{1}{3}\vec{AD} ; \vec{CF} = \frac{1}{3}\vec{AC}$$

1. Montrer que les plans  $(BCD)$  et  $(EFG)$  sont parallèles.

Soit  $ABCD$  un tétraèdre et  $t \in \mathbb{R}^*$ .

On considère les points  $M$ ,  $N$  et  $K$  tels que :

$$\vec{DM} = t\vec{DA} ; \vec{CN} = (1-t)\vec{CD} ; \vec{NK} = t\vec{CB}$$

2. Montrer que les plans  $(ABC)$  et  $(MNK)$  sont parallèles.

Soit  $ABCDEFGH$  un cube.

Les points  $I$ ,  $J$ ,  $K$  et  $L$  sont les milieux respectifs des segments  $[AE]$ ,  $[AB]$ ,  $[EH]$  et  $[KJ]$ .

3. a- Montrer que  $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}$  et  $\vec{IL} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ .

3. b- Montrer que les plans  $(ABC)$  et  $(IJK)$  se coupent selon une droite  $(\Delta)$ , dont on déterminera un point et un vecteur directeur.