

Sommaire**V- Applications de la dérivation****5-1/ Monotonie d'une fonction numérique****5-2/ Extrema d'une fonction dérivable sur un intervalle****VI- Dérivées successives****VII- L'équation différentielle**

V- Applications de la dérivation**5-1/ Monotonie d'une fonction numérique****Proposition**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- Si la fonction f est constante sur I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) = 0$
- Si la fonction f est croissante sur I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) \geq 0$
- Si la fonction f est décroissante sur I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) \leq 0$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- Si f' est nulle sur I , alors la fonction f est constante sur I .

Remarques

- Les résultats de la proposition précédente ne sont valables que sur un intervalle.
- La fonction dérivée est un outil puissant pour étudier la monotonie d'une fonction numérique.

Pour étudier la monotonie d'une fonction f dérivable sur un intervalle de \mathbb{R} , on calcule la fonction dérivée f' puis on détermine son signe et on utilise la proposition précédente.

Applications

1. En utilisant la fonction dérivée, étudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivantes :

$$\begin{array}{l} \boxed{1} f(x) = \frac{x+2}{x-1} \\ \boxed{2} f(x) = \frac{x^2-x+4}{x-1} \\ \boxed{3} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} \end{array}$$

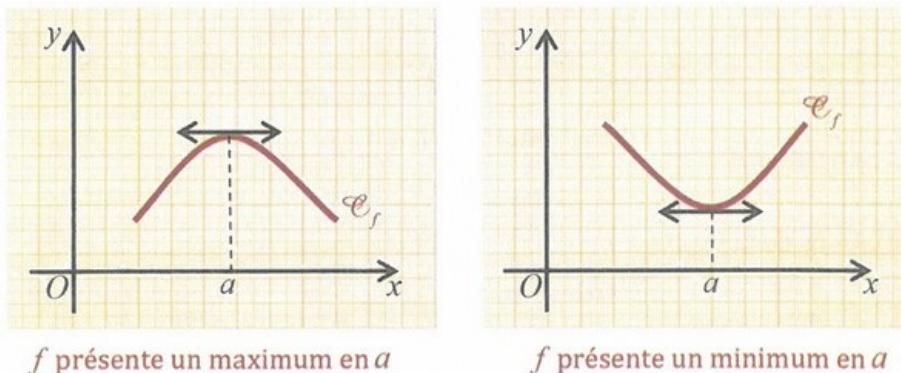
$$\begin{array}{l} \boxed{4} f(x) = \cos(2x) + 1 \\ \boxed{5} f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \\ \boxed{6} f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}} \end{array}$$

5-2/ Extrema d'une fonction dérivable sur un intervalle

Proposition

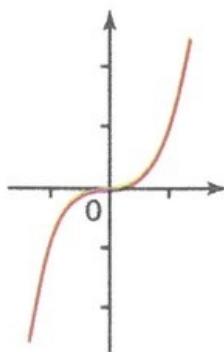
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .

Si f admet un extremum local au point a , alors : $f'(a) = 0$



Remarques

- La réciproque de la proposition précédente est évidemment fausse comme le montre l'exemple classique $f(x) = x^3$ sur \mathbb{R} . Pour cet exemple, on a $f'(0) = 0$ mais f ne présente pas un extremum en 0 :



La condition $f'(a) = 0$ est donc nécessaire mais pas suffisante pour que la fonction f présente un extremum au point a d'un intervalle ouvert I .

- Si f admet un extremum local au point a , alors la tangente à la courbe C_f au point $A(a; f(a))$ est horizontale.

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I . Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum en a .

Applications

1. Déterminer les extrema de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad f(x) &= 4x^3 - x^2 - 1 \\ \boxed{2} \quad f(x) &= \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\ \boxed{3} \quad f(x) &= \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

VI- Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et f' dérivable sur I .

La dérivée de la fonction I s'appelle la dérivée seconde de f est notée f'' .

Plus généralement, on définit par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f , notée $f^{(n)}$, comme suit :

- On pose : $f^{(0)} = f$
- Pour $n \geq 1$, on dit que f est n fois dérivable sur I si elle est $n - 1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I . On pose alors : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Applications

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1. a- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
1. b- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) \ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

VII- L'équation différentielle

Définition

Soit ω un nombre réel non nul.

L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y'' est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.

Toute fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée solution de l'équation différentielle .

Proposition

Soit ω un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur \mathbb{R} par $y(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$. Soit ω un nombre réel non nul et $(x_0; y_0; y_1) \in \mathbb{R}^3$.

Alors l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ possède une solution unique f vérifiant les conditions : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Remarques

- Dans le cas où $\omega = 0$, l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ devient $y'' = 0$. Dans ce cas, la solution générale de l'équation $y'' = 0$ est donnée par $y(x) = ax + b$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
- La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ peut encore s'écrire sous la forme $y(x) = \lambda \cos(\omega x + \varphi)$ ou $y(x) = \lambda \sin(\omega x + \varphi)$ avec $(\lambda; \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Applications

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{l} \boxed{1} y'' + 3y = 0 \\ \boxed{2} y'' + 9y = 0 \\ \boxed{3} y'' + 5y = 0 \end{array}$$

2. Déterminer la solution G de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ telle que $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ et $G'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.