Mathématiques : 1Bac SM

Séance 11-2-1 : Dérivabilité d'une fonction numérique - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

V- Applications de la dérivation

5-1/ Monotonie d'une fonction numérique

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si la fonction f est constante sur I, alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) = 0$

- Si la fonction f est croissante sur I, alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) \geq 0$

- Si la fonction f est décroissante sur I, alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) \leq 0$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I.

- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement décroissante sur $/$.

- Si f' est nulle sur I, alors la fonction f est constante sur I.

Remarques

- Les résultats de la proposition précédente ne sont valables que sur un intervalle.

- La fonction dérivée est un outil puissant pour étudier la monotonie d'une fonction numérique.

Pour étudier la monotonie d'une fonction f dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on calcule la fonction dérivée f' puis on détermine son signe et on utilise la proposition précédente.

Applications

1. En utilisant la fonction dérivée, étudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivantes :

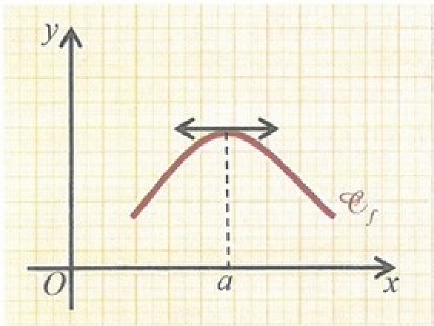
$\boxed{1}\ f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ $\boxed{2}\ f(x) = \frac{x^2-x+4}{x-1}$ $\boxed{3}\ f(x) = \sqrt{x^2-2x}$	$\boxed{4}\ f(x) = \cos(2x)+1$ $\boxed{5}\ f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ $\boxed{6}\ f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

5-2/ Extrema d'une fonction dérivable sur un intervalle

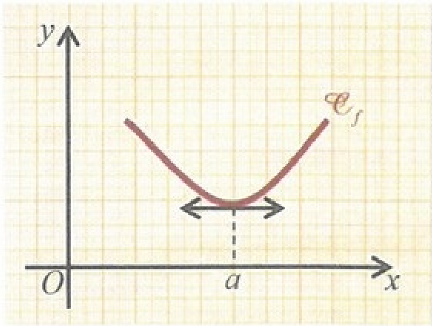
Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

Si f admet un extremum local au point a, alors : $f'(a) = 0$



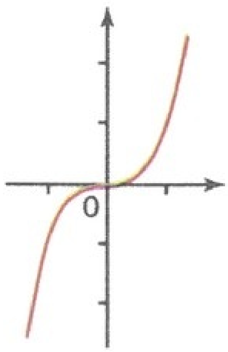
f présente un maximum en *a*



f présente un minimum en *a*

Remarques

- La réciproque de la proposition précédente est évidemment fausse comme le montre l'exemple classique $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$. Pour cet exemple, on a $f'(0) = 0$ mais f ne présente pas un extremum en 0 :



La condition $f'(a) = 0$ est donc nécessaire mais pas suffisante pour que la fonction f présente un extremum un point a d'un intervalle ouvert I.

- Si f admet un extremum local au point a, alors la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est horizontale.

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum en a.

Applications

1. Déterminer les extrema de chacune des fonctions suivantes :

$$\boxed{1}\ f(x) = 4x^3 - x^2 - 1$$
$$\boxed{2}\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$
$$\boxed{3}\ f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$$

VI- Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur / et f' dérivable sur I.

La dérivée de la fonction I s'appelle la dérivée seconde de f est notée f ".

Plus généralement, on définit par récurrence la dérivée $n^{ième}$ de la fonction f, notée $f^{(n)}$, comme suit :

- On pose : $f^{(0)} = f$

- Pour $n \geq 1$, on dit que f est n fois dérivable sur I si elle est $n-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. On pose alors : $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Applications

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1. a- Calculer f' (x) et f " (x) pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
1. b- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

VII- L'équation différentielle

Définition

Soit ω un nombre réel non nul.

L'équation y " $+\omega^2 y = 0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y " est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.

Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant f " $(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée solution de l'équation différentielle .

Proposition

Soit ω un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle y " $+\omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Soit ω un nombre réel non nul et $(x_0; y_0; y_1) \in \mathbb{R}^3$.

Alors l'équation différentielle y " $+\omega^2 y = 0$ possède une solution unique f vérifiant les conditions : $f(x_0) = y_0$ et f' $(x_0) = y_1$.

Remarques

- Dans le cas où $\omega = 0$, l'équation différentielle $y\text{"} + \omega^2 y = 0$ devient $y\text{"} = 0$. Dans ce cas, la solution générale de l'équation $y\text{"} = 0$ est donnée par $y(x) = ax + b$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

- La solution générale de l'équation différentielle $y\text{"} + \omega^2 y = 0$ peut encore s'écrire sous la forme $y(x) = \lambda \cos(\omega x + \varphi)$ ou $y(x) = \lambda \sin(\omega x + \varphi)$ avec $(\lambda; \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Applications

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\boxed{1}\ y\text{"} + 3y = 0$$
$$\boxed{2}\ y\text{"} + 9y = 0$$
$$\boxed{3}\ y\text{"} + 5y = 0$$

2. Déterminer la solution G de l'équation différentielle $y\text{"} + 16y = 0$ telle que $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ et $G'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.