

Sommaire

I- Dérivabilité d'une fonction en un point

1-1/ Nombre dérivé en un point

1-2/ Approximation affine d'une fonction dérivable

II- Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

2-1/ Définitions et notations

2-2/ Interprétation géométrique (demi-tangente en un point d'une courbe)

III- Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

3-1/ Fonction dérivé

3-2/ Opérations sur les fonctions dérivables

I- Dérivabilité d'une fonction en un point

1-1/ Nombre dérivé en un point

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a . Il est noté $f'(a)$.

On écrit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ ou encore $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Remarques

- Dans le taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $x - a$ représente une variation de x et $f(x) - f(a)$ la variation correspondante de y .

Quand les accroissements de x et y deviennent petits, le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$.

C'est pour cette raison qu'on trouve parfois, notamment en physique, la notation $\frac{df}{dx}(a)$ pour le nombre dérivé de f en a .

- La notion de dérivabilité, étant définie à l'aide d'une limite, est une notion locale.

Applications

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f au point a dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} \quad f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \text{ et } a = \sqrt{2}$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = |x^2 - 2x| \text{ et } a = 0$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \frac{x+1}{x-5} \text{ et } a = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \sqrt{|x+3|} \text{ et } a = -3$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = \sin x \text{ et } a = 0$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = \cos x \text{ et } a = \frac{\pi}{2}$$

1-2/ Approximation affine d'une fonction dérivable

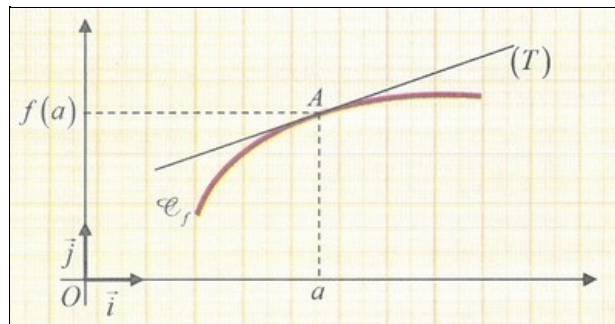
Définition

Soit f une fonction dérivable en a .

La droite (T) d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée la tangente à la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f au point d'abscisse a .

La fonction $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a .

On écrit alors : $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$ au voisinage de a ou $f(h) \approx hf'(a) + f(a)$ au voisinage de 0.



Remarques

- On a déjà vu dans les activités les approximations suivantes, valables pour h voisin de 0 :

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} ; \frac{1}{1+h} \approx 1 - h ; (1+h)^2 \approx 1 + 2h ; (1+h)^3 \approx 1 + 3h$$

- L'approximation affine locale consiste donc à assimiler \mathcal{C}_f à (T) pour h proche de 0 (et donc pour x proche de a).

Applications

1. Donner des valeurs approchées des nombres suivants :

$$(0,998)^3 ; (2,00578)^2 ; (1,04958)^3$$

$$\sqrt{1,00791} ; \frac{1}{1,0434} ; \frac{1}{(0,999)^2}$$

2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f au pointé d'abscisse a , dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} \quad f(x) = 2x^2 + x - 1 \text{ et } a = 1$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = 3x^2 + 2 \text{ et } a = -1$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 \text{ et } a = 2$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \frac{x+1}{x+2} \text{ et } a = 1$$

II- Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

2-1/ Définitions et notations

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a, a + r[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à droite de a s'il existe un réel l_1 tel que : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l_1$

Le nombre l_1 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a . Il est noté $f'_d(a)$.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_d(a)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a - r; a]$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à gauche de a s'il existe un réel l_2 tel que : $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l_2$

Le nombre l_2 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a . Il est noté $f'_g(a)$.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_g(a)$

Applications

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & f(x) = |x^2 - 1| \text{ et } a = -1 \\ \boxed{2} \quad & f(x) = |x^2 + 3x| \text{ et } a = -3 \\ \boxed{3} \quad & \begin{cases} f(x) = x^3 + 1; x \leq 1 \\ f(x) = x^2 + 2 - \frac{1}{x}; x > 1 \end{cases} \text{ et } a = 1 \\ \boxed{4} \quad & \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}; x \geq -1 \\ f(x) = \sin(\pi x); x < -1 \end{cases} \text{ et } a = -1 \end{aligned}$$

Proposition

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , n un entier naturel non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a alors les propriétés suivantes :

- $(f + g)' = f' + g'$; $(\alpha f)' = \alpha f'$; $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $(f^n)' = n \cdot f' \cdot f^{n-1}$
- Si la fonction g ne s'annule pas sur I , alors : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- Enfin, si f est strictement positive sur I , alors : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Applications

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a dans chacun des cas suivants :

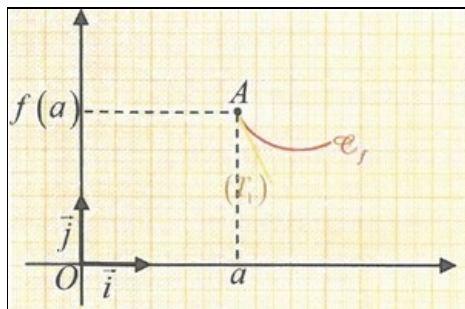
$$\begin{aligned} & \boxed{1} \quad f(x) = |x^2 - 3x| \text{ et } a = 3 \\ & \boxed{2} \quad \begin{cases} f(x) = x^3; & x \geq -1 \\ f(x) = x^2 - 2; & x < -1 \end{cases} \text{ et } a = -1 \\ & \boxed{3} \quad \begin{cases} f(x) = x\sqrt{x}; & x \geq 0 \\ f(x) = x^2; & x < 0 \end{cases} \text{ et } a = 0 \\ & \boxed{4} \quad \begin{cases} f(x) = x^3 - x; & x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}; & x < 1 \end{cases} \text{ et } a = 1 \end{aligned}$$

2-2/ Interprétation géométrique (demi-tangente en un point d'une courbe)

- Si f est une fonction dérivable à droite au point a , alors sa courbe représentative \mathcal{C}_f admet une demi-tangente (T_1) au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.

L'équation de la demi-tangente (T_1) est donnée par :

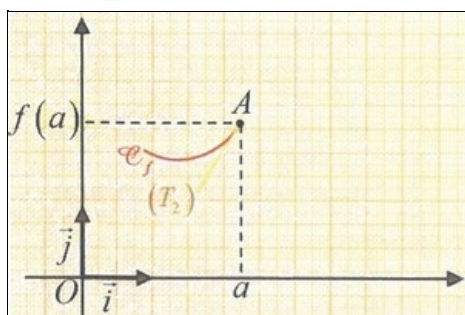
$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$



- Si f est une fonction dérivable à gauche au point a , alors sa courbe représentative \mathcal{C}_f admet une demi-tangente (T_2) au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$.

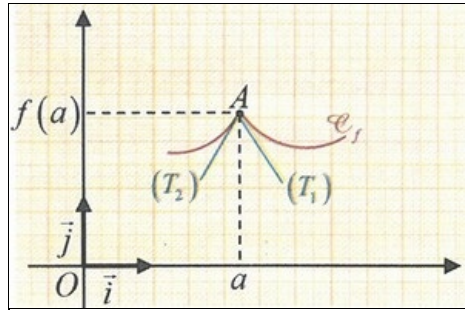
L'équation de la demi-tangente (T_2) est donnée par :

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$



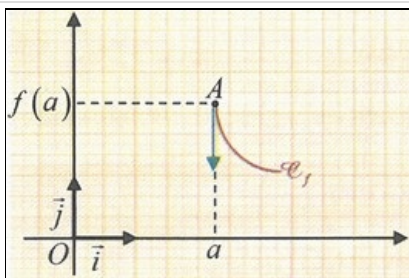
- Si f est une fonction dérivable à gauche et à droite en a telle que $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, alors f n'est dérivable en a .

On dit que $A(a; f(a))$ est un point anguleux de \mathcal{C}_f .



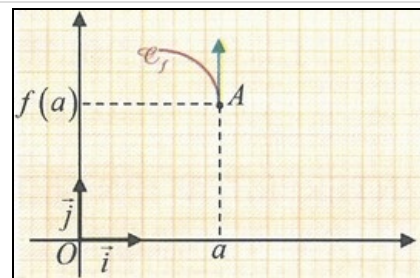
Remarques

- Si $f'_d(a) = 0$ (resp. $f'_g(a) = 0$), alors la demi-tangente (T_1) (resp. (T_2)) est horizontale, c'est-à-dire, parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$ ou $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$, alors la courbe représentative \mathcal{C}_f admet une demi-tangente verticale au point $A(a; f(a))$ (parallèle à l'axe des ordonnées).



$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$



$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a , puis définir les demi-tangentes de la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f au point $A(a; f(a))$:

$$\boxed{1} \quad f(x) = |x^2 + x| \text{ et } a = 0$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = x|x-2| \text{ et } a = 2$$

$$\boxed{3} \quad \begin{cases} f(x) = x^3 - x; & x \leq -1 \\ f(x) = x^2 + x; & x > -1 \end{cases} \text{ et } a = -1$$

$$\boxed{4} \quad \begin{cases} f(x) = -x^3 + 3x; & x \leq -2 \\ f(x) = \sqrt{4-x^2}; & -2 < x \leq 2 \end{cases} \text{ et } a = -2$$

III- Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

3-1/ Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On note f' la fonction qui, à chaque $x \in I$, associe le nombre dérivée de f en x .

On l'appelle la fonction dérivée de f , ou plus simplement la dérivée de f .

On écrit aussi : $f' = \frac{df}{dx}$

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a; b]$.

On dit que f est dérivable sur $[a; b]$ si elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ et dérivable à droite en a et à gauche en b .

Applications

- Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I , puis définir sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I :

$\boxed{1}$ $f(x) = x^2 + 3x - 1$ et $I = \mathbb{R}$	$\boxed{4}$ $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ et $I = [0; 1]$
$\boxed{2}$ $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ et $I = [\frac{1}{2}; +\infty[$	$\boxed{5}$ $f(x) = (x^2 - x)\sqrt{x - 1}$ et $I = [1; +\infty[$
$\boxed{3}$ $f(x) = 2 \cos x + 1$ et $I = \mathbb{R}$	$\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ et $I =]-\infty; -2[$

Tableau des dérivées usuelles

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto 0$	\mathbb{R}
$x \mapsto ax + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto a$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$x \mapsto nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$)

II- Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

3-2/ Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , n un entier naturel non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a alors les propriétés suivantes :

- $(f + g)' = f' + g'$; $(\alpha f)' = \alpha f'$; $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $(f^n)' = n \cdot f' \cdot f^{n-1}$
- Si la fonction g ne s'annule pas sur I , alors : $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$ et $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- Enfin, si f est strictement positive sur I , alors : $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

III- Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Toute fonction polynomiale est dérivable sur \mathbb{R} .

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

II- Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition des fonctions f et f' , puis définir la fonction dérivée f' :

$$\boxed{1} \quad f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = -2x^5 + 3x^2 - 2x - 1$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \frac{3}{(2x-1)^2}$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{x+1}$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = \frac{7x-1}{2x+3}$$

$$\boxed{7} \quad f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$$

$$\boxed{8} \quad f(x) = (x^2 + x)^5$$

$$\boxed{9} \quad f(x) = \frac{3}{x}\sqrt{2x+1}$$

$$\boxed{10} \quad f(x) = 5 \cos^3 x - 7 \sin^2 x$$

$$\boxed{11} \quad f(x) = (1 - x^2) \tan x$$

$$\boxed{12} \quad f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

Proposition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , et a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.

Soit J l'ensemble des réels x tels que $(ax + b) \in I$. Alors :

La fonction f définie par $f(x) = u(ax + b)$ est dérivable sur l'intervalle J , et de plus :

$$(\forall x \in J) \quad f'(x) = au'(ax + b)$$

Applications

1. Définir la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} \quad f(x) = \cos(\pi x) - 1$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = 5 \sin(4x + 3)$$

$$\boxed{3} \quad f(x) = \tan(2x)$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \cos^3(\pi x + 2)$$

$$\boxed{5} \quad f(x) = \sin^2(3x - 1)$$

$$\boxed{6} \quad f(x) = \cos(2x) \sin(3x)$$