AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 10-1-1 : Limite d'une fonction numérique - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Limite finie d'une fonction numérique en un point

1-1/ Fonction définie au voisinage d'un nombre réel

1-2/ Limite nulle en zéro d'une fonction numérique

1-3/ Limite finie d'une fonction numérique en un point

1-4/ Limite de quelques fonctions usuelles en un point

1-5/ Limite à droite - Limite à gauche

II- Limite infinie d'une fonction numérique en un point

2-1/ Limite infinie d'une fonction numérique en zéro

2-2/ Limite infinie d'une fonction numérique en un point

III- Limite finie d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

3-1/ Limite nulle d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

3-2/ Limite finie d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

IV- Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

4-1/ Introduction

4-2/ Limites infinies et ordre

I- Limite finie d'une fonction numérique en un point

1-1/ Fonction définie au voisinage d'un nombre réel

Définition

Soit f une fonction fonction numérique et D_f son ensemble de définition et a un nombre réel.

- On dit que f est définie au voisinage de a sauf peut-être en a s'il existe un réel r strictement positif tel que :

$$]a-r;a+r[-\{a\} \subset D_f$$

- On dit que f est définie au voisinage de a à droite s'il existe un réel r strictement positif tel que :

$$]a; a+r[\subset D_f$$

- On dit que f est définie au voisinage de a à gauche s'il existe un réel r strictement positif tel que :

$$]a-r; a[\subset D_f$$

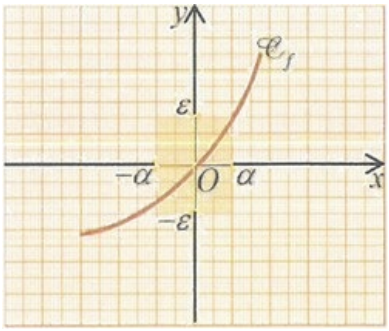
1-2/ Limite nulle en zéro d'une fonction numérique

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de zéro sauf peut-être en 0.

Dire que f a pour limite 0 quand x tend vers 0 signifie : aussi petit que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]-\alpha; \alpha[$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\varepsilon; \varepsilon[$.

Autrement dit : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)$; $\left(\forall x \in D_f\right)\ \left(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon\right)$

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{0} f(x) = 0$



Applications

1. Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 + x\right) = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2x+1} = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{x^2+1} = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \left(2x + x^2 - x^3\right) = 0$$

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r; r[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors : $\begin{cases} (\forall x \in I)\ |f(x)| \leq |u(x)| \\ \lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Remarques

- Pour tous $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to 0} kx^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} k\sqrt{|x|} = 0$

- La limite d'une fonction en 0 est une notion locale : elle ne dépend de la fonction qu'au voisinage de 0. C'est pourquoi on peut considérer : $x \in]-1; 1[$ ou $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ ou n'importe quel intervalle ouvert centré en 0 inclus dans le ensemble de définition de la fonction étudiée.

- On peut avoir $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ sans que la fonction f soit définie en 0.

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$$\boxed{1}\ \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\boxed{2}\ \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{\pi}{x^3}\right)$$

2. Justifier que $(\forall x \in]-1;1[)\ :\ \left|2x^3-3x\right| \leq 3\left|x\right|$, puis déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^3-3x\right)$
3. Justifier que $(\forall x \in [-1;1])\ :\ \sqrt{|x|-x^2} \leq \sqrt{|x|}$, puis déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{|x|-x^2}\right)$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

4. a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ :\ |f(x)| \leq |x|$
4. b- En déduire : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

1-3/ Limite finie d'une fonction numérique en un point

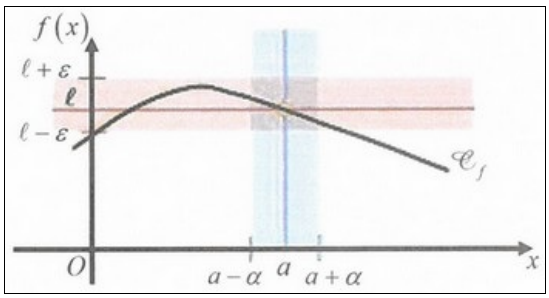
Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un réel a et $l \in \mathbb{R}$.

Dire que f a pour limite l quand x tend vers a signifie : aussi petit que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\alpha; a+\alpha[$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$.

Autrement dit : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ \left(0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon\right)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = l$



Remarque

En posan $x-a=h$, on obtient : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = l$

Applications

1. Montrer en utilisant la définition que :

$$\boxed{1}\ \lim_{x\to 1}\left(3x^2-5x+1\right) = -1$$
$$\boxed{2}\ \lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x-1} = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{3}\ \lim_{x\to 2}\sqrt{4x+1} = 3$$

2. Déterminer les limites suivantes :

$$\boxed{1}\ \lim_{x\to 2}\sqrt{3x+3}$$
$$\boxed{2}\ \lim_{x\to 1}\left(x^3-4\right)$$
$$\boxed{3}\ \lim_{x\to -2}\frac{x+1}{2x+1}$$

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I=]a-r;a+r[-\{a\}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$, $a\in\mathbb{R}$ et $l\in\mathbb{R}$.

Alors : $\begin{cases}(\forall x\in I)\ |f(x)-l|\leq|u(x)| \\ \lim\limits_{x\to a}u(x)=0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$

Remarques

Pour tout $(a;k)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to a}k(x-a)^n=0$ et $\lim\limits_{x\to a}k\sqrt{|x-a|}=0$

Si la limite d'une fonction numérique f existe en un point, alors elle est unique.

Applications

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

1. a- Prouver que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ |f(x)-1|\leq(x-1)^2$
1. b- En déduire : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

1-4/ Limite de quelques fonctions usuelles en un point

Proposition

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $a\in\mathbb{R}$.

Alors :

$\boxed{1}\ \lim\limits_{x\to a}P(x)=P(a)$	$\boxed{4}\ Si\ Q(a)\neq 0,\ alors\ \lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$
$\boxed{2}\ \lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$	$\boxed{5}\ Si\ a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (\mathrm{k}\in\mathbb{Z}),\ alors\ \lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$
$\boxed{3}\ \lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$	$\boxed{6}\ Si\ a>0,\ alors\ \lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$\boxed{1}\ \lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-7x-1\right)$	$\boxed{6}\ \lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-6x^2+5x+4}{x^2+4x+3}$
$\boxed{2}\ \lim\limits_{x\to -1}\left(x^{2018}-x^{2017}+2\right)$	$\boxed{7}\ \lim\limits_{x\to 3}(x-2)^3\left(1-x^2\right)$
$\boxed{3}\ \lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\left(x^3-5x^2+x+1\right)$	$\boxed{8}\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{(2x-1)(x^2-5x+3)}{(5x^2-6)(1-x+x^2)}$
$\boxed{4}\ \lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x-1}$	$\boxed{9}\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$
$\boxed{5}\ \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\frac{x^2+x}{2x-1}$	$\boxed{10}\ \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\tan x$

1-5/ Limite à droite - Limite à gauche

Définition

Soit r un réel strictement positif et $a \in \mathbb{R}$.

- On dit qu'une fonction f, définie sur l'intervalle $x \in]a; a+r[$, admet une limite finie l en a à droite, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de l, lorsque x s'approche de plus en plus de a en prenant des valeurs supérieures à a.

Autrement dit : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - \mathrm{l}| < \varepsilon)$

Ce réel l, s'il existe, est unique. Il est noté : $\mathrm{l} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\mathrm{l} = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

- On dit qu'une fonction f, définie sur l'intervalle $x \in]a; a+r[$, admet une limite finie l en a à gauche, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de l, lorsque x s'approche de plus en plus de a en prenant des valeurs inférieures à a.

Autrement dit : $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)\,;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (-\alpha < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \mathrm{l}| < \varepsilon)$

Ce réel l, s'il existe, est unique. Il est noté : $\mathrm{l} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\mathrm{l} = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

Applications

1. Étudier la limite de la fonction f au point a dans les cas suivants ($E(x)$ est la partie entière de x) :

$$\boxed{1}\ f(x) = \frac{|x^2-4|}{x^2-2x}\ et\ a = 2$$

$$\boxed{2}\ \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-2x}{x+2}\ ;\ x \geq 0 \\ f(x) = E(x)\ ;\ x < 0 \end{cases}\ et\ a = 0$$

II- Limite infinie d'une fonction numérique en un point

2-1/ Limite infinie d'une fonction numérique en zéro

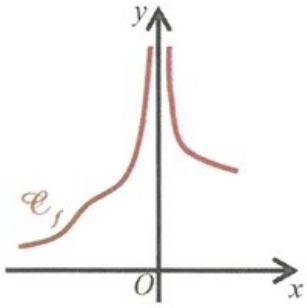
Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0.

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en 0 signifie que $f(x)$ est supérieur à tout réel $A > 0$, quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de 0.

Autrement dit : $(\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\,;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (0 < |x| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

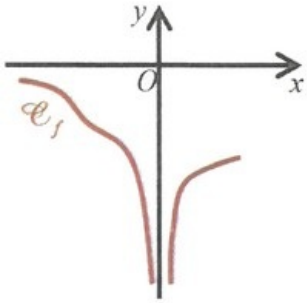
On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{0} f(x) = +\infty$



- Dire que f a pour limite $-\infty$ en 0 signifie que $f(x)$ est inférieur à tout réel $-A < 0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de 0.

Autrement dit : $(\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\,;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (0 < |x| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{0} f(x) = -\infty$



Remarques

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{k}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{k}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{k}{x^n} = +\infty$ si l'entier n est pair.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{k}{x^n} = -\infty$ si l'entier n est impair.

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r; r[- \{0\}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers 0 à droite ou à gauche.

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-x+x^2}}{x^3}$ $\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$	$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{2}{x} - 1 + \cos\frac{2}{x}\right)$ $\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^4} - \sin\frac{\pi}{x}\right)$

2-2/ Limite infinie d'une fonction numérique en un point

Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de a sauf peut-être en a.

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que $f(x)$ est supérieur à tout réel $A > 0$, quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a.

Autrement dit : $(\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = +\infty$

- Dire que f a pour limite $-\infty$ en a signifie que $f(x)$ est inférieur à tout réel $-A < 0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a.

Autrement dit : $(\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = -\infty$

Remarques

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que la limite de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ quand h tend vers 0 est égale à $+\infty$.

Ainsi, on a l'équivalence : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = +\infty$

De même, on a les équivalences suivantes :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = -\infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{h \to 0^+} f(a+h) = +\infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{h \to 0^+} f(a+h) = -\infty$$
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{h \to 0^-} f(a+h) = +\infty$$
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{h \to 0^-} f(a+h) = -\infty$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$
- Si n est un entier pair : $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$
- Si n est un entier impair : $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3}{(x+1)^2}$	$\boxed{5}$ $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \left\lvert \sin \frac{2}{(x-2)^2} \right\rvert \right)$
$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3}$	$\boxed{6}$ $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \times \frac{1}{(x-1)^{2019}}$
$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\tan^2 x + 1}{(x+1)^2}$	$\boxed{7}$ $\lim\limits_{x \to -4^-} \frac{E(x)}{(x+4)^3}$
$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^3-1}{(x-1)^3}$	

III- Limite finie d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

3-1/ Limite nulle d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

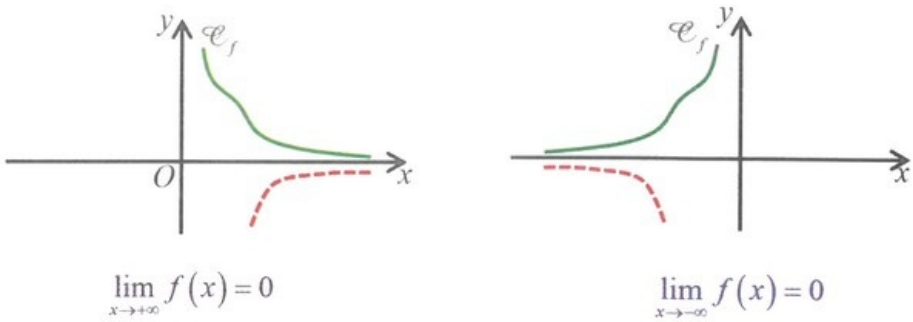
- On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si son ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. de la forme $]-\infty; A[$).

- On dit que f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une limite nulle si, pour $x \in D_f$, $|f(x)|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x (resp. $-x$) soit suffisamment grand.

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0$)

On a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)\right]$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x < -B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)\right]$$



Remarques

- De la définition précédente, on obtient l'équivalence :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(-x) = 0$$

- Soit $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0\ ;\ \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0\ ;\ \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{\sqrt{-x}} = 0$$

- Lorsqu'on écrit $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$, cela signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

3-2/ Limite finie d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

Définition

- Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et l un nombre réel.

On dit que la fonction f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si la limite de la fonction $x \mapsto f(x) - l$ est nulle quand x tend vers $+\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{+\infty} f(x) = l$

Autrement dit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\right]$$

- Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et l un nombre réel.

On dit que la fonction f a pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si la limite de la fonction $x \mapsto f(x) - l$ est nulle quand x tend vers $-\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{-\infty} f(x) = l$

Autrement dit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \left[(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\right]$$

Proposition

- Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et l un nombre réel.

Si pour tout $x \in I$: $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

- Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$ et l un nombre réel.

Si pour tout $x \in I$: $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

Applications

1. Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-1 + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right) = -1$
2. Calculer les limites suivantes :

$$\boxed{1}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-2}{x^4+4}$$
$$\boxed{2}\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2+\cos x}{x^2}$$
$$\boxed{3}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\pi\sqrt{\mathrm{x}}}{\sqrt{\mathrm{x}}}$$

Soit la fonction $h\ :\ x \mapsto \frac{2x^2-\sin^2(\pi\mathrm{x})}{x^2}$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+\cos x}-1}{x^2}$

4. a- Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sqrt{1+\cos x}} \times \frac{1}{x^2}$
4. b- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

IV- Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

4-1/ Introduction

Définition

- Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

On a les deux équivalences suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x > B \Rightarrow f(x) > A)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x > B \Rightarrow f(x) < -A)$$

- Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.

On a les deux équivalences suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x < -B \Rightarrow f(x) > A)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$$

Remarques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si l'entier n est pair. et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si l'entier n est impair.

4-2/ Limites infinies et ordre

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$.

- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$.

- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Applications

On considère la fonction : $f : x \mapsto 5x^2 + x\sqrt{x^2+1}$

1. a- Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) \geq 5x^2$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1. b- Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

On considère la fonction : $g : x \mapsto |x| + 1 - \sin(2x+1)$

2. a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ |x| \leq g(x)$

2. b-En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

3. Calculer les limites suivantes :

$$\boxed{1}\ \lim_{x\to-\infty} x^2(2+\sin x)$$
$$\boxed{2}\ \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - 1 + \cos x\right)$$
$$\boxed{3}\ \lim_{x\to+\infty} (2x - E(x))$$