Mathématiques : 1Bac SM

Séance 8-1 : Trigonométrie (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Formules de transformation de base

1-1/ Formules d'addition

1-2/ Transformation de $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$ - Formules de linéarisation

1-3/ Formules de $\cos(a)$, $\sin(a)$ et $\tan(a)$ en fonction de $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

II- Transformation de produits en sommes

III- Transformation de sommes en produits

IV- Transformation de l'expression $a\cos(x) + b\sin(x)$

I- Formules de transformation de base

1-1/ Formules d'addition

Proposition

Soit a et b deux nombre réels.

On a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos a.\cos b + \sin a.\sin b \\
\cos(a+b) &= \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a.\cos b - \cos a.\sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a.\cos b + \cos a.\sin b
\end{aligned}$$

Applications

1. En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.
2. Calculer $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

3. Établir les égalités suivantes :

$$\boxed{1}\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\boxed{2}\ \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{3}\ \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{4}\ -\sqrt{6}\cos x-\sqrt{2}\sin x=2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$$

Proposition

Soit a et b deux nombre réels tels que $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On a les formules suivantes :

- Si $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors : $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$
- Si $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors : $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$

Applications

1. En remarquant que $\frac{5\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$, calculer $\tan\frac{5\pi}{12}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

2. Simplifier $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right).\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

1-2/ Transformation de $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$ - Formules de linéarisation

Proposition

Soit a et b deux nombre réels.

On a les formules suivantes :

- $\cos(2a)=\cos^2 a-sin^2a=2\cos^2 a-1=1-2sin^2a$
- $\sin(2a)=2\sin a.\cos a$
- $\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$ et $\tan^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$
- Si $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $2a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, alors : $\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

Remarques

On a pour tout réel a :

$1+\cos a=2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)$; $1-\cos a=2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$

$\sin a=2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)$

On rappelle que pour tout réel a, on a : $\sin a=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$

Applications

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Établir les égalités suivantes :

$$\boxed{1}\ 1+\sin x=\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2$$
$$\boxed{2}\ 1+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}=2$$
$$\boxed{3}\ 2\sin x+\sin(2x)=8\sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\boxed{4}\ 1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}.\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$$
$$\boxed{5}\ 1+\cos x-\sin x=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}.\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

Soit α un réel tel que : $\sin\alpha\neq-1$

2. Montrer que : $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel tel $x \neq k\pi$ que pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3. Montrer que $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\frac{x}{2}$ et $\sin x = (1+\cos x)\tan\frac{x}{2}$.

1-3/ Formules de $\cos(a)$, $\sin(a)$ et $\tan(a)$ en fonction de $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

Proposition

Soit a un nombre réel tel que $a \neq \pi + 2k\pi$ et $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On pose : $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$

On a : $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

Applications

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tan x = 2$

1. Calculer $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ et $\tan(2x)$.

Soit x un nombre réel tel que $x \neq \pi + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $t = \tan\frac{x}{2}$

2. Montrer que $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = t^2$ et $\frac{\sin x}{1+\cos x} = t$.

Soit a et b deux réels de l'intervalle $\left]0 : \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Prouver les inégalités suivantes :

$$\boxed{1}\ 1 + \frac{1}{\tan a} < \frac{1}{\tan\frac{a}{2}}$$
$$\boxed{2}\ \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\tan a + \tan b}{2}$$

(Indication : on pourra poser $x = \tan\frac{a}{2}$ et $y = \tan\frac{b}{2}$).

II- Transformation de produits en sommes

Proposition

Soit a et b deux nombre réels.

On a les formules suivantes :

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$
$$\cos a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

Applications

1. Écrire sous forme de sommes les produits suivants :

$$A(x) = \cos x.\cos(5x)$$
$$B(x) = \sin(3x).\sin(4x)$$
$$C(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

III- Transformation de sommes en produits

Proposition

Soit p et q deux nombre réels.

On a les formules suivantes :

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p-\sin q=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Applications

1. Écrire sous forme d'un produit les sommes suivantes :

$$A(x)=\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)$$
$$B(x)=\ 1+\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)$$
$$C(x)=1+\sin(2x)-\cos(2x)$$
$$D(x)=\sin x+\sin(5x)+\sin(7x)$$

2. a- Écrire sous forme de produit l'expression $\cos x+\cos(2x)$ où $x\in\mathbb{R}$.
2. b- En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\cos x+\cos(2x)=0$
2. c- Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation : $\cos x+\cos(2x)\geq 0$
3. a- Factoriser l'expression $\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x)$ où $x\in\mathbb{R}$.
3. b- Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;0]$ l'inéquation :
   $\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x)<0$
4. a- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin(3x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$
4. b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x+2\sin(3x)-\sqrt{3}\cos x=0$
4. c- Résoudre dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $\sin x+2\sin(3x)-\sqrt{3}\cos x\leq 0$

IV- Transformation de l'expression $a\cos(x)+b\sin(x)$

Proposition

Soit a et b deux nombre réels tels que $(a;b)\neq(0;0)$.

Alors il existe un réel α tel que $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ avec $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Applications

1. Mettre les expressions suivantes sous forme de $\rho\cos(\omega x+\varphi)$:

$$A(x)=\cos(2x)+\sin(2x)$$
$$B(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$$
$$C(x)=3\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}$$

2. a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
2. b- En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=1$
2. c- Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation : $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)\geq 1$

3. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; 2\pi[$ l'inéquation : $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} \geq -1$