Mathématiques : 1Bac SM

Séance 7-2-1 : Étude analytique du produit scalaire - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

V- Équation cartésienne d'un cercle

5-1/ Le cercle

Définition

Soit Ω un point du plan $\mathscr{P}$ et R un réel positif.

Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.

On le note : $\mathscr{C}(\Omega;R)$

On a alors : $\mathscr{C}(\Omega;R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

5-2/ Équation cartésienne d'un cercle

Proposition

Une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R $(R \geq 0)$ est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

que l'on peut écrire $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ où $c=a^2+b^2-R^2$.

Applications

1. Écrire une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ \Omega\,(2;4)\ et\ R=3$$
$$\boxed{2}\ \Omega\left(-\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}\right)\ et\ R=2\sqrt{2}$$
$$\boxed{3}\ \Omega\,(-1;-3)\ et\ R=\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Écrire une équation du cercle cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et passant par le point A dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ \Omega\,(2;0)\ et\ A\,(2;4)$$
$$\boxed{2}\ \Omega\,(1;2)\ et\ A\,(4;-2)$$
$$\boxed{3}\ \Omega\,(-2;3)\ et\ A\,(2;-1)$$

5-3/ Équation d'un cercle défini par l'un de ses diamètres

Proposition

Soit A et B deux points distincts dans le plan $\mathscr{P}$.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$.

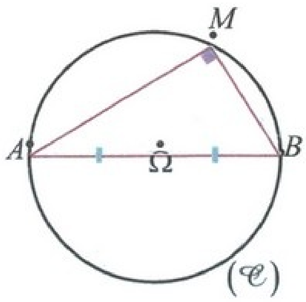
Le centre du cercle $(\mathscr{C})$ est le point Ω milieu du segment $[AB]$, et son rayon est $R=\frac{AB}{2}$.

Si $A\,(x_A;y_A)$, $B\,(x_B;y_B)$ et $M\,(x,y)$, alors une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ est :

$$(x-x_A)\,(x-x_B)+(y-y_A)\,(y-y_B)=0$$

Autrement dit :

$$x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+(x_A.x_B+y_A.y_B)=0$$



Applications

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ dans chacun des cas suivants :

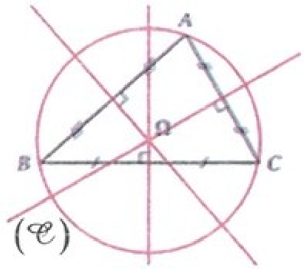
$$\boxed{1}\ A\,(1;3)\ et\ B\,(2;1)$$
$$\boxed{2}\ A\,(-2;4)\ et\ B\,(2;3)$$
$$\boxed{3}\ A\,(-3;1)\ et\ B\,(2;5)$$

5-4/ Équation d'un cercle défini par trois points non alignés

Proposition

Par trois points non alignés A, B et C passe un seul cercle de centre $(\mathscr{C})$ le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC, et de rayon $R=\Omega A$.

Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle ABC.



Applications

1. Déterminer une équation du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC dans les deux cas suivants :

$$\boxed{1}\ A\,(2;1)\ et\ B\,(4;-1)\ et\ C\,(0;3)$$
$$\boxed{2}\ A\,(3;-1)\ et\ B\,(5;3)\ et\ C\,(1:1)$$

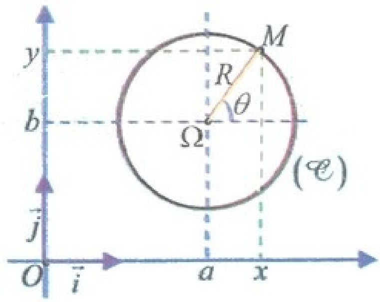
VI- Représentation paramétrique d'un cercle

Proposition

Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega\,(a;b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M\,(x,y)$ du plan qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$.



Applications

1. Donner une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ dans les cas suivants :

$$\boxed{1}\ x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$$
$$\boxed{2}\ x^2 + y^2 + 4x - 16 = 0$$
$$\boxed{3}\ x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 = 0$$

2. Déterminer l'ensemble (E) des points $M\,(x,y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = 4 + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

3. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = -1 + 3\sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

VII- Ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Proposition

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan $\mathscr{P}$ vérifiant l'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$ où $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

On pose : $k=a^2+b^2-4c$

- Si $k<0$, alors l'ensemble (Γ) est vide : $(\Gamma)=\emptyset$
- Si $k=0$, alors l'ensemble (Γ) est un singleton : $(\Gamma)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$
- Si $k>0$, alors l'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{k}}{2}$.

Applications

1. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x,y)$ vérifiant l'équation cartésienne correspondante à chacun des cas suivants :

$\boxed{1}\ x^2+y^2-2x-4y+2=0$	$\boxed{4}\ x^2+y^2+\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{24}{5}=0$
$\boxed{2}\ x^2+y^2-12x+14y+85=0$	$\boxed{5}\ x^2+y^2-8x-12=0$
$\boxed{3}\ x^2+y^2+8x-6y+27=0$	$\boxed{6}\ x^2+y^2-6x+6y+18=0$

IIX- Intérieur et extérieur d'un cercle

Définition

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon $R>0$, et M un point du plan $\mathscr{P}$.

- Le point M est sur le cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\Omega M=R$
- Le point M est à l'intérieur du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\Omega M<R$
- Le point M est à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\Omega M>R$

Proposition

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équation cartésienne $x^2+y^2+ax+by+c=0$ où $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$.

Pour tout point $M(x_0;y_0)$ du plan :

- M est un point du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : ${x_0}^2+{y_0}^2+ax_0+by_0+c=0$
- M est à l’intérieur du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : ${x_0}^2+{y_0}^2+ax_0+by_0+c<0$
- M est à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : ${x_0}^2+{y_0}^2+ax_0+by_0+c>0$

Ainsi, le cercle $(\mathscr{C})$ détermine trois parties disjointes dans le plan $\mathscr{P}$.

Applications

1. Déterminer la position du point A par rapport au cercle $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

a) $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $\Omega(2;3)$ et de rayon $R=1$ et le point $A(-1;2)$.

b) $(\mathscr{C})\ :\ x^2+y^2-2x+4y=0$ et le point $A(0;1)$.

c) $(\mathscr{C})\ :\ \begin{cases} x=1+2\cos\theta \\ y=1+2\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$ et le point $A(2;1)$.

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$$\boxed{1}\ x^2+y^2+2x-6y+9\geq 0$$
$$\boxed{2}\ x^2+y^2+2y-3<0$$
$$\boxed{3}\ x^2+y^2<4$$

3. Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$$\boxed{1}\ \begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x-y>0 \end{cases}$$
$$\boxed{2}\ \begin{cases} x^2+y^2-x-2y-\frac{11}{4}\geq 0 \\ x+2y-3<0 \end{cases}$$
$$\boxed{3}\ \begin{cases} x^2+y^2+10x-4y+25<0 \\ x+2y-3>0 \\ 3x+y+11\leq 0 \end{cases}$$

IX- Positions relatives d'une droite et d'un cercle

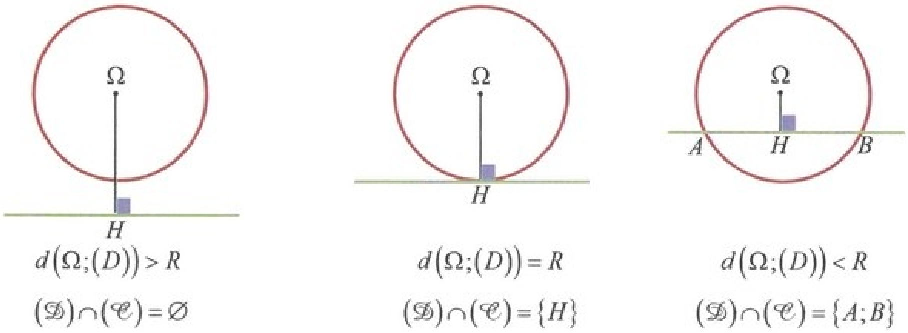
Proposition

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon R, et $(\mathscr{D})$ une droite dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé.

- Si $d\left(\Omega;(\mathscr{D})\right)>R$, alors l'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ est vide : (2)) n (S?) = 0.

- Si $d\left(\Omega;(\mathscr{D})\right)=R$, alors l'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ est le singleton $\{H\}$ où H est le point de contact (ou de tangence) de la droite $(\mathscr{D})$ et du cercle $(\mathscr{C})$.

- Si $d\left(\Omega;(\mathscr{D})\right)>R$, alors l'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ est un bipoint $\{A;B\}$.



Applications

1. Étudier l'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du cercle $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ (\mathscr{C})\ :\ x^2+y^2-4x+2y=0 \ et\ (\mathscr{D})\ :\ 2x-y=0$$
$$\boxed{2}\ (\mathscr{C})\ :\ (x+2)^2+(y+2)^2=2 \ et\ (\mathscr{D})\ :\ x-y-2=0$$
$$\boxed{3}\ (\mathscr{C})\ :\ x^2+y^2-2x+4y-11=0 \ et\ (\mathscr{D})\ :\ x+y-3=0$$

X- Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle

Proposition

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon R, et $A\left(x_0;y_0\right)$ un point du cercle $(\mathscr{C})$, et (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ au point A.

La droite (T) est l'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ du plan tels que : $\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0$

Si le cercle $(\mathscr{C})$ admet une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$, alors une équation de la tangente (T) est donnée par :

$$(T)\ :\ xx_0+yy_0+\frac{1}{2}a\,(x+x_0)+\frac{1}{2}b\,(y+y_0)+c=0$$