

Sommaire**I- Étude analytique du produit scalaire**

1-1/ Expression analytique du produit scalaire

1-2/ Expression analytique de la norme d'un vecteur et de la distance de deux points

1-3/ Inégalité de Cauchy-Schwarz

1-4/ Inégalité triangulaire

II- Produit scalaire et angles

2-1/ Repérage polaire d'un vecteur

2-2/ Expression de $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ et $\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$

2-3/ Aire d'un triangle

III- Étude analytique de la droite dans le plan

3-1/ Vecteur normal à une droite

3-2/ Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal à cette droite

3-3/ Condition de perpendicularité de deux droites

3-4/ Distance d'un point à une droite

I- Étude analytique du produit scalaire

1-1/ Expression analytique du produit scalaire

PropositionSoit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan.Alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$; $\vec{i} \cdot \vec{u} = x$; $\vec{j} \cdot \vec{v} = y$ **Applications**Soit les vecteurs $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + 5\vec{j}$ et $\vec{v} = -4\vec{i} + 7\vec{j}$.

1. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Soit les vecteurs $\vec{u} = (\sqrt{3} - 1)\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = (\sqrt{3} + 1)\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$.

2. A-t-on $\vec{u} \perp \vec{v}$? Justifier la réponse.

Soit les vecteurs $\vec{u} = (2m - 1)\vec{i} + 4m\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ où $m \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer m sachant que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

1-2/ Expression analytique de la norme d'un vecteur et de la distance de deux points

Proposition

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est un vecteur du plan, alors sa norme est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points du plan, alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Applications

On considère les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v} (\sqrt{5} - 2; \sqrt{5} + 2)$ et $\vec{w} = (2m - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$.

2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\|\vec{w}\| = \sqrt{10}$.

On considère dans le plan, les points $A(0; 3)$, $B(-1; 5)$ et $C(2m + 1; m - 1)$ où $m \in \mathbb{R}$.

3. Calculer les distances AB , AC et BC .

4. Est-ce que le triangle ABC peut être isocèle ? Justifier la réponse.

1-3/ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On a alors :

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

- L'égalité $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ aura lieu si, et seulement si, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

1-4/ Inégalité triangulaire

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On a alors :

- L'inégalité triangulaire : $|\vec{u} + \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

- L'égalité $|\vec{u} + \vec{v}| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ aura lieu si, et seulement si, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et ont le même sens.

Applications

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, Montrer que :

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) x + y \leq (1 + x^2)(1 + y^2)$$

Soit $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$(a - c)^2 + (b - d)^2 \geq \frac{(ad - bc)^2}{a^2 + b^2}$$

3. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tous réels

$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$:

$$\sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i)^2 + (\sum_{i=1}^n b_i)^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

II- Produit scalaire et angles

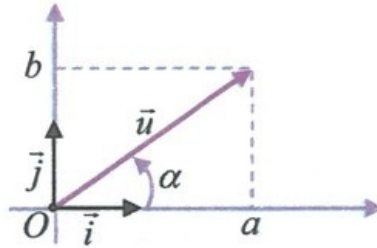
2-1/ Repérage polaire d'un vecteur

Proposition

Soit \vec{u} un vecteur non nul du plan.

Si α désigne une mesure de l'angle $\left(\vec{i}; \vec{u}\right)$, alors : $\vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot [(\cos \alpha) \vec{i} + (\sin \alpha) \vec{j}]$

Donc $a = \|\vec{u}\| \cdot \cos \alpha$ et $b = \|\vec{u}\| \cdot \sin \alpha$



2-2/ Expression de $\cos\left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}\right)$

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}\right)$.

On a alors les formules suivantes :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Applications

1. Calculer $\cos\left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}\right)$ dans les deux cas suivants :

$$\begin{aligned} \text{[1]} \quad \vec{u} &= -\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \\ \text{[2]} \quad \vec{u} &= \vec{i} - \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = (\sqrt{3} - 1)\vec{i} + (\sqrt{3} + 1)\vec{j} \end{aligned}$$

On considère les points : $A(1; 3)$, $B(3; 1)$ et $C(-3; -1)$.

2. Calculer $\cos\left(\widehat{\vec{BA}; \vec{BC}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\vec{BA}; \vec{BC}}\right)$.

2-3/ Aire d'un triangle

Proposition

L'aire du triangle ABC est : $S = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) \right|$

Remarque

On a aussi : $S = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB} \right) \right|$

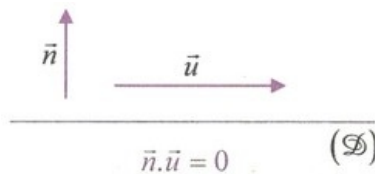
III- Étude analytique de la droite dans le plan

3-1/ Vecteur normal à une droite

Définition

Soit (\mathcal{D}) une droite du plan.

Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (\mathcal{D}) est appelé vecteur normal à la droite (\mathcal{D}) .



Proposition

Soit (\mathcal{D}) une droite dans le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Si \vec{n} et \vec{n}' sont deux vecteurs normaux sur (\mathcal{D}) , alors ils sont colinéaires.
- Si $\vec{u}(\alpha; \beta)$ est un vecteur directeur de (\mathcal{D}) , alors le vecteur $\vec{n}(-\beta; \alpha)$ est normal à (\mathcal{D}) .
- Si une équation cartésienne de (\mathcal{D}) est $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$, alors le vecteur est normal à la droite (\mathcal{D}) .

Applications

On considère les droites $(\mathcal{D}) : 5x + 2y - 3 = 0$ et $(\mathcal{D}') : y = 2x - 3$.

1. Les droites (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') sont-elles orthogonales ? Justifier la réponse.
2. Déterminer un vecteur normal à la droite (\mathcal{D}) dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} \quad (\mathcal{D}) : x + y + 3 = 0$$

$$\boxed{2} \quad (\mathcal{D}) : y = x$$

$$\boxed{3} \quad (\mathcal{D}) : x = 3$$

$$\boxed{4} \quad (\mathcal{D}) : 2x - 1 = 0$$

3-2/ Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal à cette droite

Proposition

Soit \vec{n} un vecteur non nul et A un point du plan \mathcal{P} .

L'ensemble des points M du plan \mathcal{P} tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est la droite (\mathcal{D}) passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

Si $A(x_A; y_A)$ et $\vec{n}(a; b)$, alors une équation cartésienne de la droite (\mathcal{D}) est :

$$(\mathcal{D}) : a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Applications

- Écrire une équation cartésienne de la droite (\mathcal{D}) passant par le point A et de vecteur normal \vec{n} dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} \ A(2; 1) \text{ et } \vec{n}(3; -2)$$

$$\boxed{2} \ A\left(-\frac{1}{2}; 3\right) \text{ et } \vec{n} = 2\vec{j}$$

$$\boxed{3} \ A(1; \sqrt{3}) \text{ et } \vec{n} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère le point $A(0; 2)$ et la droite (D) d'équation cartésienne $2x + \sqrt{7}y - 6 = 0$.

- Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale à (D) .

3-3/ Condition de perpendicularité de deux droites

Proposition

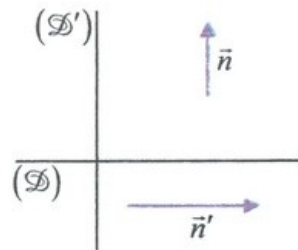
Soit (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') deux droites du plan \mathcal{P} .

- Si \vec{n} et \vec{n}' sont deux vecteurs normaux respectivement aux droites (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') , alors :

$$(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$$

- Si les droites (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') sont définies respectivement par les équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, alors :

$$(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$



Applications

On considère les droites $(D) : 5x + 2y - 3 = 0$ et $(D') : y = 2x - 3$.

- Les droites (D) et (D') sont-elles perpendiculaires ? Justifier la réponse.

On considère les droites $(\Delta_1) : (2m - 3)x - 5y + 11 = 0$ et $(\Delta_2) : 2x + 3y + 5 = 0$ où $m \in \mathbb{R}$.

- Déterminer la valeur de m pour que les droites (Δ_1) et (Δ_2) soient perpendiculaires.

On considère les points $A(1; 2)$, $B(-3; -6)$, $C(0; 1)$ et $D(2; 0)$.

- Montrer que $(AB) \perp (CD)$.

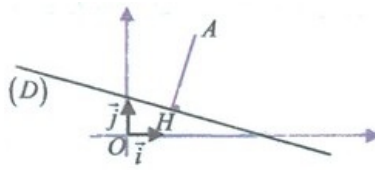
3-4/ Distance d'un point à une droite

Proposition

Soit (\mathcal{D}) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ et $A(x_A; y_A)$ un point du plan.

La distance du point A à la droite (\mathcal{D}) est donnée par :

$$d(A; (\mathcal{D})) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Applications

1. Calculer la distance du point A à la droite (\mathcal{D}) dans chacun des cas suivants :

1 $A(2; 3)$ et $(\mathcal{D}) : 2x - 5y + 4 = 0$

2 $A(-2; 3)$ et $(\mathcal{D}) : x - 3y + 5 = 0$

3 $A(-4; 3)$ et $(\mathcal{D}) : 3x - 5 = 0$

4 $A(0; 1)$ et $(\mathcal{D}) : y = -2x + 3$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(1; -1)$, $B(-1; 2)$ et $C(-3; -2)$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .

3. Calculer $d(C; (AB))$, puis en déduire l'aire du triangle ABC .

4. Déterminer le couple de coordonnées du point H projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) .