AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 6-1 : Le barycentre dans le plan (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Barycentre de deux points pondérés

1-1/ Point pondéré

Définition

Soit A un point du plan et α un nombre réel.

Le couple $(A;\alpha)$ s'appelle un point pondéré ou massif. Le réel α s'appelle le poids ou la masse de A.

On dit aussi que le point A est affecté du coefficient α ou de la masse algébrique α.

1-2/ Barycentre de deux points pondérés

Soit $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés du plan tels que : $\alpha+\beta=0$

Il existe un unique point G vérifiant l'égalité : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

On dit aussi que G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

Remarques

Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, alors $G = A$.

Si les points A et B sont confondus, alors $G = A = B$.

Si $\alpha + \beta = 0$, alors il n'existe pas de barycentre pour les points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, alors G est le point de la droite (AB) tel que : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

En effet, il suffit d'utiliser la relation de Chasles :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

La relation $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ assure l'existence, l'unicité et la construction du point G.

Applications

Soit A, B et C trois points du plan tels que : $2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

1. Montrer que le point B est le barycentre des deux points A et C en précisant leur poids.

Soit A et B deux points distincts du plan et G le point tel que $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

2. Montrer que G est le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;\beta)$ où β est un réel à déterminer.

Soit A et B deux points distincts du plan et M un point de la droite (AB).

On pose : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

4. Montrer que M est le barycentre du système pondéré $\{(A;1-t);(B;t)\}$.
5. Montrer que si $t = \frac{2}{7}$, alors M est aussi le barycentre du système pondéré $\{(A;5);(B;\gamma)\}$ où γ est un réel à déterminer.
6. Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A;x)$ et $(B;y)$ où x et y sont des réels à déterminer dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}\ \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\boxed{2}\ \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$	$\boxed{3}\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{BA}$ $\boxed{4}\ 9\overrightarrow{AG} + 8\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

1-3/ Homogénéité du barycentre

Proposition

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(A;k\alpha);(B;k\beta)\}$ pour tout réel k non nul.

En d'autres termes : Le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul.

Cette propriété s'appelle « homogénéité du barycentre »

Remarques

- Si I est barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\alpha)$ (même poids), alors I est le milieu du segment $[AB]$

On dit aussi que I est le centre de gravité des points A et B.

- Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\left\{\left(A;\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right);\left(B;\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$ avec $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1$, donc, lors d'une étude de barycentre de deux points pondérés, on peut supposer que la somme de leurs poids égale à 1 et considérer les poids t et $1-t$ avec $t\in\mathbb{R}$.

À titre d'exemple, le barycentre H des points pondérée $(A;5)$ et $(B;-2)$ est le même que celui des points pondérés $\left(A;\frac{5}{3}\right)$ et $\left(B;-\frac{2}{3}\right)$.

1-4/ Position du barycentre

Proposition

Soit G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ avec $\alpha\beta\neq 0$.

- Si $\alpha\beta>0$, alors $G\in[AB]$.

- Si $\alpha\beta<0$ et $|\alpha|>|\beta|$, alors $G\notin[AB]$ et $G\in[BA)$.

- Si $\alpha\beta<0$ et $|\alpha|<|\beta|$, alors $G\notin[AB]$ et $G\in[AB)$.

Applications

1. Parmi les points E, F et G suivants, déterminer ceux qui appartiennent à la droite (AB) et n'appartiennent pas au segment $[AB]$:

a) E est le barycentre du système pondéré $\{(A;-3);(B;-5)\}$

b) $2\overrightarrow{FA}+7\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

c) A est le barycentre du système pondéré $\{(B;2);(G;-5)\}$.

1-5/ Propriété caractéristique du barycentre

Proposition

Soit $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta\neq 0$.

Le point G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ si, et seulement si, pour tout point M du plan $\mathscr{P}$:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

Remarques

Une conséquence immédiate de la proposition précédente est la suivante :

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si, pour tout point M du plan $\mathscr{P}$: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Si l'égalité $\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{NG}$ est valable pour un point N du plan, alors G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, et la relation $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ est valable pour tout point M du plan $\mathscr{P}$.

Applications

Soit A et B deux points distincts du plan $\mathscr{P}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\boxed{1}\ ||7\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}||=3AB$$
$$\boxed{2}\ ||2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}||=MA$$
$$\boxed{3}\ ||5\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{BM}||\leq||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}||$$

Soit ABC un triangle.

On considère le point G barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;3)$.

2. Construire le point G puis simplifier la somme vectorielle $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$ où M un point du plan $\mathscr{P}$.
3. Déterminer et tracer l'ensemble (D) des points M tels que $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

Soit $ABCD$ un carré de côté a.

4. Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :

$$\boxed{1}\ \left\{M\in\mathscr{P}\ /\ ||-5\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}||=2a\right\}$$
$$\boxed{2}\ \left\{M\in\mathscr{P}\ /\ ||\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}||\leq 2a\right\}$$
$$\boxed{3}\ \left\{M\in\mathscr{P}\ /\ a\leq||3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}||\leq 2a\right\}$$
$$\boxed{4}\ \left\{M\in\mathscr{P}\ /\ ||\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}||\leq||2\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MD}||\right\}$$
$$\boxed{5}\ \left\{M\in\mathscr{P}\ /\ 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\ \textit{est colinéaire à}\ \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\}$$

1-6/ Coordonnées du barycentre

Proposition

Soit $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère du plan.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, alors : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors le couple de coordonnées de G est : $G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$

Applications

Dans le repère $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, on considère les points $B(2;5)$ et $C(5;2)$.

Soit H le barycentre des points pondérés $(B;2)$ et $(C;1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point H.

Soit G le point du plan tel que H soit le barycentre des points pondérés $(G;2)$ et $(O;1)$.

2. Déterminer les coordonnées du point G.

Soit $ABCD$ un parallélogramme et E le barycentre du système pondérés $\{(B;2);(D;-1)\}$.

3. Déterminer les coordonnées du point E dans le repère $\left(B;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$.

II- Barycentre de trois points pondérés

2-1/ Barycentre de trois points pondérés

Définition

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant l'égalité : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$.

On dit aussi que G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$.

Applications

Soit A, B et C trois points du plan tels que : $7\overrightarrow{BD}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

1. Montrer que le point D est le barycentre des points A, B et C en déterminant le poids de chacun d'eux.

On considère l'égalité vectorielle : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

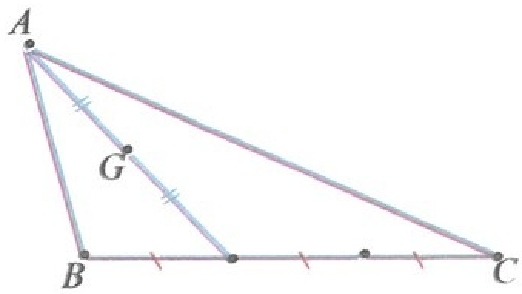
2. Montrer que le point G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ où β et γ sont des réels à déterminer.

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[AB]$.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;2)$ et $(C;-1)$.

3. Montrer que : $G\in(IC)$

Soit ABC un triangle et G le point figuré dans le dessin suivant :



4. Montrer que G est le barycentre du système pondéré $\{(A;3);(B;2);(C;1)\}$.

2-2/ Homogénéité du barycentre

Proposition

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(A;k\alpha);(B;k\beta);(C;k\gamma)\}$ pour tout réel k non nul.

En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul.

Cette propriété s'appelle « homogénéité du barycentre » .

Remarques

Si G est barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\alpha)$ et $(C;\alpha)$ (même poids), alors G est le centre de gravité du triangle ABC.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\left\{\left(A;\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right);\left(B;\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right);\left(C;\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\right\}$ avec $\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=1$.

Donc, lors d'une étude de barycentre de trois points pondérés, on peut supposer que la somme de leurs poids égale à 1 et considérer les poids α', β' et $1-\alpha'-\beta'$ avec $(\alpha';\beta')\in\mathbb{R}^2$.

2-3/ Propriété caractéristique du barycentre

Proposition

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Le point G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ si, et seulement si, pour tout point M du plan $\mathscr{P}$: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

Ce résultat traduit : « la propriété caractéristique du barycentre »

Remarques

- En considérant $M=A$, on trouve : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\right)$

- Si l'égalité $\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{NG}$ est valable pour un point N du plan, alors G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$.

- La propriété caractéristique du barycentre est parfois utilisée pour la recherche des points P du plan vérifiant une relation du genre $\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{v}$ avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur donné.

2-4/ Associativité du barycentre

Proposition

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et $\alpha+\beta\neq 0$.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(H;\alpha+\beta);(C;\gamma)\}$, où H est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

En d'autres termes : Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux poids.

Applications

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés $(A;3)$, $(B;7)$ et $(G;-4)$.

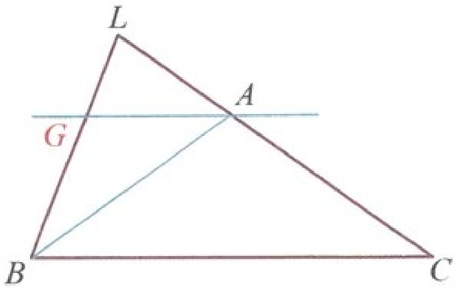
Soit K le point du plan tel que $\overrightarrow{BK}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Montrer que G est le milieu du segment $[AK]$.

Soit ABC un triangle et L un point extérieur au triangle ABC et appartenant à la demi-droite $[CA)$.

On pose $\overrightarrow{AL} = -t\overrightarrow{AC}$ avec un nombre réel strictement positif.

La droite passant par A et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (BL) en G :



2. Montrer que G est barycentre des points A, B et C en déterminant le poids de chacun de ces points.
3. Montrer que (CG) coupe le segment $[AB]$ au point H barycentre des points pondérés $(A; 1+t)$ et $(B; t)$.

Soit ABC un triangle et P le point du plan tel que : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Soit I le point d'intersection de (AP) et (BC) et G le barycentre du système $\{(A;1);(B;-3);(P;1)\}$.

4. Construire le point P, puis calculer $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{IB}$.
5. Construire le point G, puis prouver que B est le centre de gravité du triangle GAP.

Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP} - 3\overrightarrow{MB}|| = ||2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MC}||$

6. Prouver que le point O milieu du segment $[BG]$ appartient à l'ensemble (Δ).

2-5/ Coordonnées du barycentre

Proposition

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan.

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$, alors :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$$

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$, alors le couple de coordonnées de G est :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}; \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

Application

Dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A(-1;2)$, $B\left(\frac{5}{2};7\right)$ et $C\left(\frac{3}{2};5\right)$.

Soit G le point du plan tel que A soit le barycentre du système pondéré $\{(B;-1);(C;1);(G;-3)\}$.

1. Déterminer les coordonnées du point G.

III- Barycentre de quatre points pondérés

De la même manière, on étend à quatre points et plus les définitions et les propriétés vues pour le barycentre d'un système pondérés à trois points pondérés.

Soit $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$, $(C;\gamma)$ et $(D;\delta)$ quatre points pondérés du plan tels que $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant l'égalité : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$, $(C;\gamma)$ et $(D;\delta)$.

Dans le cas où les poids sont égaux, on parle alors d'isobarycentre.

Les propriétés d'homogénéité, de caractérisation et d'associativité du barycentre de trois points pondérés sont généralisables au barycentre de quatre points pondérés. Ainsi :

- Pour tout point M du plan : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$

- Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux ou trois d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme de leurs poids.

- Le couple de coordonnées du barycentre G est donné par :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\right)$$