AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 5-1 : Les suites numériques (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Généralités sur les suites numériques

1-1/ Définitions et notations

Définition

On appelle suite numérique toute fonction u de $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'image d'un entier n de $\mathbb{N}$ (ou de I) par la suite u est notée u_n.

Le nombre u_n s'appelle le terme général de la suite u, c'est aussi le terme de rang n de la suite u.

Remarques

La notation u_n se lit aussi : « u indice n ».

Il ne faut pas confondre la suite (u_n) et son terme général u_n, terme d'indice n de la suite (u_n).

Les suites rencontrées en pratique sont souvent définies sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}$*. On peut toujours ramener l'étude d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indexée par $\mathbb{N}$ en posant :
$(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n = u_{n+n_0}$

1-2/ Modes usuels de génération d'une suite numérique

Une suite (u_n) peut être définie :

- Par une formulation explicite de son terme général u_n :

En particulier $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique donnée.

- Par la donnée de son premier terme (ou de ses premiers termes) et une relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases} \text{...etc.}$$

Application

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $u_1 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{4n} u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.

II- Suite majorée - suite minorée - suite bornée

Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I)\ u_n \leq M$

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I)\ u_n \geq m$

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques

- On prendra garde au fait que, dans la définition, les réels M et m sont des constantes et dépendent pas de l'indice de la suite.

Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ vérifie l'iné-galité $u_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais n'est pas une suite majorée.

- S'il existe un réel $S \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq S$, alors la suite (u_n) est bornée.

Applications

Soit (a_n) la suite numérique définie par : $a_n = \frac{2n+5}{n+1}$

1. Montrer que la suite (a_n) est majorée par 5 et minorée par 2.

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n < 2$

Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \sqrt{6 + v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 < v_n < 3$

Soit $(w_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique définie par : $w_n = \frac{5^n+3^n}{5^n-2\times 3^n}$

4. Vérifier que pour tout entiers $n \geq 2$: $w_n = 1 + \frac{3}{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 2}$, puis en déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ est bornée.

III- Monotonie d'une suite numérique

Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si : $\left(\forall (n;m) \in I^2\right)$ $(m \geq n \Rightarrow u_m \geq u_n)$

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si : $\left(\forall (n;m) \in I^2\right)$ $(m \geq n \Rightarrow u_m \leq u_n)$

Remarques

- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante alors : $(\forall n \in I)$ $u_n \geq u_{n_0}$
- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante alors : $(\forall n \in I)$ $u_n \leq u_{n_0}$
- On définit de même une suite strictement croissante et strictement décroissante. Il suffit de remplacer dans la définition précédente, les symboles « $\leq$ » et « $\geq$ » par les symboles « $<$ » et « $>$ ».

Proposition

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si, et seulement si : $(\forall n \in I)$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante si, et seulement si : $(\forall n \in I)$ $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si, et seulement si : $(\forall n \in I)$ $u_{n+1} - u_n \leq 0$

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante si, et seulement si : $(\forall n \in I)$ $u_{n+1} - u_n < 0$

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si, et seulement si : $(\forall n \in I)$ $u_{n+1} = u_n$

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone si, et seulement si, elle est croissante ou décroissante.

Remarques

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique telle que : $(\forall n \in I)$ $u_n > 0$

On a pour tout $n \in I$: le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui donc de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$

$$\left[u_{n+1} - u_n = u_n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right)\right]$$

Ainsi, pour étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 et on a :

- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si, et seulement si : $(\forall n \in I)$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si, et seulement si : $(\forall n \in I)$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

Applications

1. Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \frac{2n+1}{3n+1}$ et $v_n = 3^{2n-1}$.

On considère la suite numérique (w_n) définie par $w_0 = 6$ et $w_{n+1} = 4 - \frac{3}{w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $w_n > 3$
3. Montrer que la suite (w_n) est décroissante, puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $3 < w_n \leq 6$

Soient (a_n) et (b_n) les deux suites numériques définies par $a_0 = 4$ et $b_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq b_n$
5. Montrer que la suite (b_n) est croissante et que la suite (a_n) est décroissante.

Soit (t_n) une suite réelle vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq t_n \leq 1$ et $(1 - t_n)t_{n+1} > \frac{1}{4}$.

6. Prouver que la suite (t_n) est strictement croissante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n \leq 4$
8. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{u_n}\right)\left(1 + \sqrt{u_n}\right)$, puis déduire la monotonie de (u_n).
9. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - u_n)$
10. En déduire par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4 - u_n \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

IV- Suite arithmétique - suite géométrique

4-1/ Suite arithmétique

Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Applications

Soit (w_n) la suite numérique définie par : $w_n = -\sqrt{3}n + \frac{3}{2}$

1. Montrer que la suite (w_n) est arithmétique et déterminer sa raison r.

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

2. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et déterminer sa raison r.

Soit (b_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_0 + b_1 + \ldots + b_n = 4n^2 - 3n$

3. Montrer que la suite (b_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Proposition

Pour que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit arithmétique, il faut et il suffit que :

$$(\forall n \geq n_0)\ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$$

Remarque

Pour que trois réels x, y et z, choisis dans cet ordre, soient des termes consécutifs d'une suite arithmétique, il faut et il suffit que : $x + z = 2y$

Proposition

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $(n;p) \in I^2$:

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Remarques

Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_0 + nr$

Si la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique de raison r, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_1 + (n - 1)r$

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r.

- Si $r>0$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.

- Si $r<0$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante.

Applications

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que : $\begin{cases} u_0-u_4=6 \\ 2u_0+u_4=3 \end{cases}$

1. Déterminer u_0, u_4 et r.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire u_{100}.

Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r telle que : $\begin{cases} v_2+v_3+v_4=15 \\ v_6=20 \end{cases}$

3. Déterminer v_0 et r, puis en déduire l'expression du terme général v_n en fonction de n.

Soit (w_n) la suite numérique définie par $w_0=1$ et $w_{n+1}=\frac{5w_n}{2w_n+5}$.

On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})\ t_n=\frac{1}{w_n}$

4. Calculer w_1 et w_2.
5. Vérifier que la suite (t_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
6. Exprimer t_n et w_n en fonction de n.

4-2/ Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique.

On pose $S_n=u_p+u_{p-1}+\ldots.+u_n$ où $(n;p)\in\mathbb{N}^2$ et $n\geq p\geq n_0$.

Alors : $S_n=\frac{n-p+1}{2}\left(u_p+u_n\right)$

Remarques

- La somme $S_n=u_p+u_{p-1}+\ldots.+u_n$ peut aussi s'écrire simplement : $S_n=\sum_{k=p}^{n}u_k$

Cette somme contient $(n-p+1)$ termes.

- Dans le cas où $p=0$, on obtient : $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{n+1}{2}\left(u_0+u_n\right)$

- Dans le cas où $p=1$, on obtient : $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{n}{2}\left(u_1+u_n\right)$

- De façon générale, la somme de termes successifs d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne arithmétique des termes extrêmes.

$$u_p+u_{p-1}+\ldots.+u_n=\frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$$
$$=\frac{(nombre\ de\ termes)\times(1er\ terme+dernier\ terme)}{2}$$

Applications

1. Calculer la somme : $S_n=-3+1+5+\ldots.+(4n+1)$

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que :

$$u_1+u_2+\ldots.+u_{26}=1144 \text{ et } u_{26}=94$$

2. Calculer u_1 et r, puis exprimer u_n en fonction de n.

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = an + b$

3. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique puis exprimer en fonction de n la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - u_n$

4. Vérifier que la suite (v_n) est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
5. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4-3/ Suite géométrique

Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique s'il existe un réel q (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} = q u_n$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Applications

Soient (a_n) et (b_n) deux suites numériques définies par $a_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$ et $b_n = 3 \times \frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}}$.

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont géométriques.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{9u_n}{4u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \neq 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = 2 - \frac{3}{u_n}$

3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Soit (x_n) la suite numérique définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = \frac{10 + x_n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $y_n = x_n - 5$

4. Montrer que la suite (y_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Proposition

Pour que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit géométrique, il faut et il suffit que :

$$(\forall n \geq n_0)\ {u^2}_{n+1} = u_n \times u_{n+2}$$

Remarque

Pour que trois réels x, y et z, choisis dans cet ordre, soient des termes consécutifs d'une suite géométrique, il faut et il suffit que : $x.z = y^2$

Remarques

Si la suite (u_n) est arithmétique de raison q, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_0.q^n$

Si la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique de raison q, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = u_1 . q^{n-1}$

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison q.

- Si $u_{n_0} > 0$ et $q > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.

- Si $u_{n_0} > 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante.

Applications

Soit (u_n) une suite géométrique à termes positifs tels que $u_4 = 0,84$ et $u_6 = 5,25$.

1. Calculer la raison q de cette suite et le premier terme u_0.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Préciser la monotonie de la suite (u_n).

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_4 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 3$

4. Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
5. Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique tels que : $\begin{cases} a+b+c = 36,75 \\ abc = 343 \end{cases}$

6. Déterminer a, b et c.

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{1}{3}\left(7u_{n+1} - 2u_n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n$ et $w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

7. Calculer v_1 et w_1.
8. Montrer que les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont géométriques.
9. Exprimer u_n en fonction de n.

4-4/ Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

On pose $S_n = u_p + u_{p-1} + \ldots. + u_n$ où $(n; p) \in \mathbb{N}^2$ et $n \geq p \geq n_0$.

Alors : $S_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Remarques

- Dans le cas où $p = 0$, on obtient $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

- Dans le cas où $p = 1$, on obtient : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q = 1$, alors : $\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)u_p$

De façon générale, la somme de termes successifs d'une suite géométrique peut être retenue par :

$$u_p + u_{p-1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$
$$= 1^{er} \text{ } terme \text{ } de \text{ } la \text{ } somme \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

IV- Suite arithmétique - suite géométrique$q \neq 1$

Applications

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique.
2. Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison .

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n\left(S_{3n} - S_{2n}\right) = \left(S_{2n} - S_n\right)^2$
4. Montrer que :

$$\sqrt{u_1 u_2} + \sqrt{u_3 u_4} + \ldots + \sqrt{u_{2n-1} u_{2n}} = \sqrt{u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1}} \times \sqrt{u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n}}$$