

### Sommaire

## VII- Représentation graphique de quelques fonctions usuelles

7-1/ La fonction trinôme du second degré - parabole

7-2/ La fonction homographique - hyperbole

7-3/ La fonction  $x \mapsto ax^3$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

7-4/ La fonction  $x \mapsto \sqrt{x+a}$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

7-5/ La fonction partie entière

## IIX- Composée de deux fonctions numériques

## IX- Fonction périodique

## VII- Représentation graphique de quelques fonctions usuelles

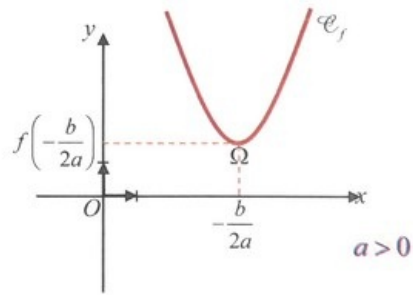
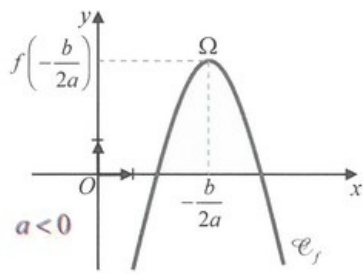
7-1/ La fonction trinôme du second degré - parabole

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels avec  $a \neq 0$ .

- Tableaux de variations :

$a > 0$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>x</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>-\infty</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>-\frac{b}{2a}</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>f(x)</math></td> <td colspan="3" style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> </td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$			
$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$						
$f(x)$									
$a < 0$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>x</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>-\infty</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>-\frac{b}{2a}</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"><math>f(x)</math></td> <td colspan="3" style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> </td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$			
$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$						
$f(x)$									

- Courbes représentatives :



$\mathcal{C}_f$  est une parabole de sommet  $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$  et d'axe de symétrie d'équation  $x = -\frac{b}{2a}$ .

### Applications

- Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$$f(x) = -2x^2 + x + 1 ; g(x) = x^2 + 2x + 2 ; h(x) = -x^2 + |x|$$

### 7-2/ La fonction homographique - hyperbole

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$  par  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels avec  $c \neq 0$ , et  $ad - bc \neq 0$ .

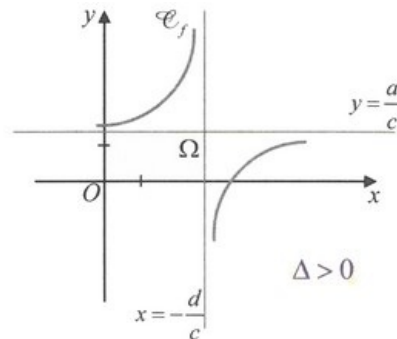
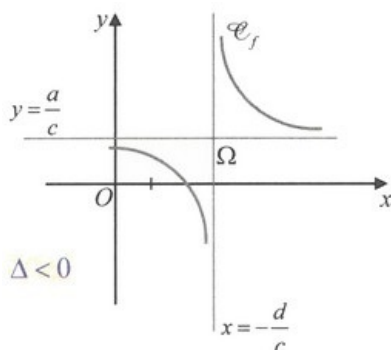
On pose :  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- Tableaux de variations :

$\Delta > 0$	$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
	$f(x)$	↗		↗

$\Delta < 0$	$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
	$f(x)$	↘		↘

- Courbes représentatives :



$\mathcal{C}_f$  est une hyperbole de centre  $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$  et d'asymptotes les droites d'équations  $x = -\frac{d}{c}$  et  $y = \frac{a}{c}$ .


- Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} ; g(x) = \frac{3x+1}{x+1} ; h(x) = -1 + \frac{1}{x} ; k(x) = \frac{|x|}{|x|+2}$$


### 7-3/ La fonction $x \mapsto ax^3$ ( $a \in \mathbb{R}$ )

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^3$  où  $a$  est un réel non nul.

- Tableaux de variations :

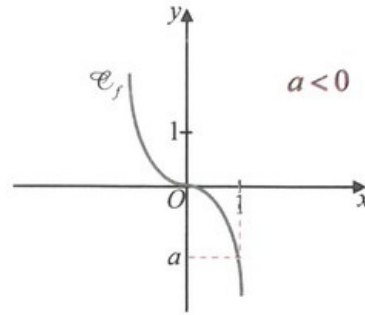
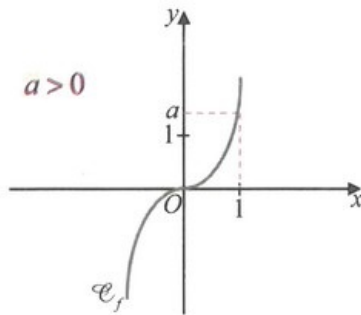
$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

$a > 0$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

$a < 0$

- Courbes représentatives :



La fonction  $f : x \mapsto ax^3$  est impaire et sa courbe  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La courbe  $\mathcal{C}_f$  passe aussi par le point de coordonnées  $(1; a)$  car  $f(1) = a$ .

- Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$$f(x) = x^3 ; g(x) = -\frac{1}{2}x^3 ; h(x) = \frac{1}{4}x^2 |x|$$


### 7-4/ La fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ ( $a \in \mathbb{R}$ )

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{x+a}$  où  $a$  est un nombre réel.

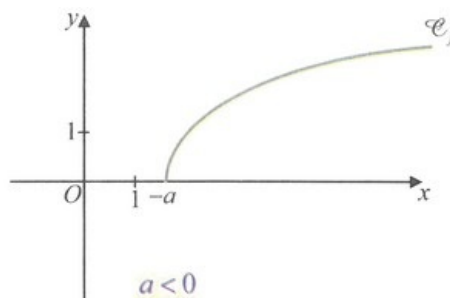
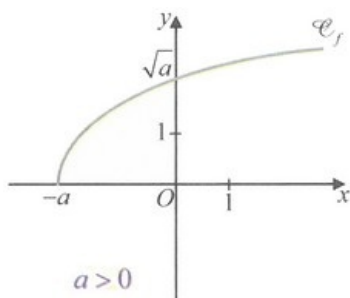
La fonction  $f$  est définie et strictement croissante sur l'intervalle  $[-a; +\infty[$ .

- Tableaux de variations :

$x$	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	0	



- Courbes représentatives :



### 7-5/ La fonction partie entière

## Définition

Soit  $x$  un nombre réel.

La partie entière de  $x$  est le plus grand entier relatif  $n$  qui est inférieur ou égal à  $x$ .

On la note  $E(x)$  ou  $[x]$ .

## Applications

- Déterminer la partie entière de chacun des nombres suivants :

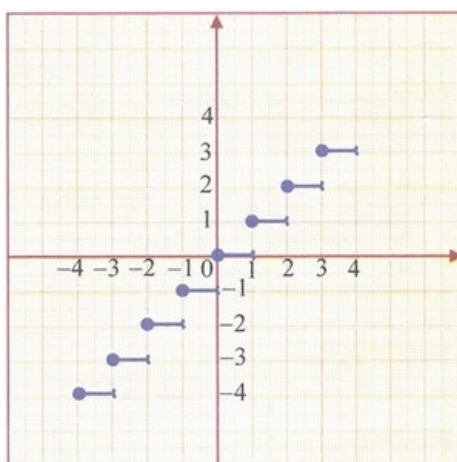
$$\frac{17}{3} ; -\frac{2020}{19} ; -2018 ; \frac{24}{25} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{n}{n+1} ; \frac{n+1}{n} ; \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

## Proposition

Pour tout  $x \in \mathbb{R} : E(x) \leq x < E(x) + 1$  et  $x - 1 < E(x) \leq x$

Pour tout  $x \in \mathbb{R} : E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z} : E(n+x) = E(x) + n$



## Applications

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et les inéquations suivantes :

$E(x) = 0$	$E(x) < 2$
$E(x) = 2$	$E(x) \geq -1$
$E(x) = -3$	$-1 \leq E(x) < 3$
$3E(x) - 1 = 0$	$2E(x) + 3 < 0$

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - E(x)$

2. Calculer :  $f(-5)$  ;  $f(\sqrt{2})$  ;  $f(8)$  ;  $f(\frac{3}{2})$  ;  $f(5,2)$

3. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) 0 \leq f(x) < 1$

4. Tracer la courbe représentative de  $f$  sur l'intervalle  $[-6; 6]$ .

## IIIX- Composée de deux fonctions numériques

### Définition

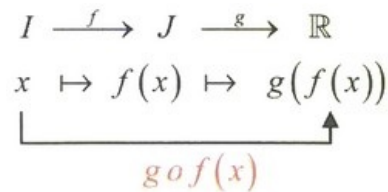
Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur deux ensembles  $I$  et  $J$  tels que :

$$f(I) \subset J$$

La fonction numérique  $h$  définie sur  $I$  par  $h(x) = g(f(x))$  est appelée composée des fonctions  $f$  et  $g$  dans cet ordre.

Elle est notée  $g \circ f$  (se lit :  $g$  rond  $f$ ).

On a alors :  $(\forall x \in I) g \circ f(x) = g(f(x))$



## Remarques

- On n'a pas en général :  $g \circ f = f \circ g$
- On a  $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$  et  $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$ .
- Pour décomposer une fonction, les conventions de priorité de calcul (entre puissance, produit, somme, ....) permettent de déterminer les fonctions de référence et l'ordre dans lequel les enchaîner.

## Applications

1. Définir les fonctions  $f \circ g$  et  $g \circ f$  dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{l}
 \boxed{1} \quad f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = \frac{2x-1}{x-1} \\
 \boxed{2} \quad f(x) = 2x - 1 \text{ et } g(x) = \frac{x-1}{x+1} \\
 \boxed{3} \quad f(x) = x^2 + 2 \text{ et } g(x) = \sqrt{x} \\
 \boxed{4} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2 - x}
 \end{array}$$

2. Décomposer la fonction  $f$  en deux fonctions dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{l}
 \boxed{1} \quad f(x) = (x - 1)^3 \\
 \boxed{2} \quad f(x) = \sqrt{2 - 5x} \\
 \boxed{3} \quad f(x) = 3 - \frac{1}{(2x-1)^2}
 \end{array}$$

## Proposition

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur deux ensembles  $I$  et  $J$  tels que :  $f(I) \subset J$

Si  $f$  et  $g$  ont le même sens de variation, alors  $g \circ f$  est croissante (éventuellement strictement croissante) sur l'intervalle  $I$ .

Si  $f$  et  $g$  ont des sens de variation contraires, alors  $g \circ f$  est décroissante (éventuellement strictement décroissante) sur l'intervalle  $I$ .

## Applications

1. En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonctions, étudier la monotonie de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{l}
 \boxed{1} \quad f(x) = 1 + \frac{5}{x^3} \text{ et } I = \mathbb{R}^- \\
 \boxed{2} \quad f(x) = \frac{-3}{x^2+1} \text{ et } I = \mathbb{R}^+ \\
 \boxed{3} \quad f(x) = x^4 + x^2 \text{ et } I = \mathbb{R}^+
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \boxed{4} \quad f(x) = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \text{ et } I = \left[0; \pi\right[ \\
 \boxed{5} \quad f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \text{ et } I = \left] -\infty; -1\right[ \\
 \boxed{6} \quad f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x} \text{ et } I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[
 \end{array}$$

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x^2 - 4x + 3}$

2. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{1}{2} < f(x) \leq 1$

On considère les fonctions numériques  $u$  et  $v$  définies par  $u(x) = x^2 - 2x$  et  $v(x) = \frac{x+2}{2x+3}$ .

3. Donner le tableau de variations de chacune des fonctions  $u$  et  $v$ .

4. En utilisant les variations des fonctions  $u$  et  $v$ , étudier les variations de la fonction  $f$  sur chacun des intervalles  $[1; +\infty[$  et  $]-\infty; 1]$ .

## IX- Fonction périodique

### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique et  $D_f$  son ensemble de définition.

On dit que  $f$  est périodique s'il existe un réel non nul  $T$  tel que pour tout  $x \in D_f$  :

$$(x + T) \in D_f \text{ et } (x - T) \in D_f \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

Le nombre réel  $T$  est appelé alors une période de  $f$ .

La plus petite période strictement positive de la fonction  $f$  (lorsqu'elle existe) est appelée la période de la fonction  $f$ .

### Applications

Soit  $a$  un réel strictement positif.

1. Montrer que la fonction  $x \mapsto \tan(ax)$  est périodique et donner sa période.

2. Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 &: x \mapsto \cos^2 x \\ f_2 &: x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \\ f_3 &: x \mapsto \sin(3x) + \cos(2x) \\ f_4 &: x \mapsto \tan(3x) - \cos(4x) \end{aligned}$$

3. Montrer que la fonction  $x \mapsto x - E(x)$  est périodique de période égale à 1.

### Proposition

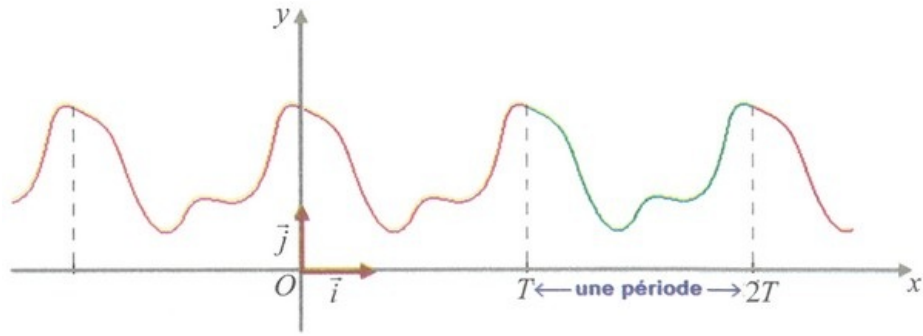
Soit  $f$  une fonction périodique de période  $T$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ , le nombre  $kT$  est aussi une période de la fonction  $f$ .

La courbe de  $\mathcal{C}_f$  est invariante par toute translation de vecteur  $kT \cdot \vec{i}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Si  $x_0 \in \mathbb{R}$  est un réel donné, la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est la réunion des images de l'ensemble  $\{M(x; f(x)) / x \in D_f \cap [x_0; x_0 + T[ \}$  par toutes les translations de vecteur  $kT \cdot \vec{i}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ainsi, pour étudier une fonction périodique de période  $T$ , il suffit de l'étudier sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  de longueur  $T$ . (Très souvent, on choisit un des deux intervalles  $[0; T[$  ou  $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right[$ ).



## Applications

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , périodique de période  $T = 3$  et telle que  $(\forall x \in [0; 3]) f(x) = |x - 2|$ .

1. Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I = [-6; 9]$ .
2. Calculer :  $f(9,78)$  ;  $f(-8,75)$  ;  $f(2020)$

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on pose :  $I_k = [3k; 3(k+1)[$

3. Calculer  $f(x)$  en fonction de  $x$  et  $k$  lorsque  $x \in I_k$ .