

### Sommaire

#### I- Application d'un ensemble vers un autre

1-1/ Applications

1-2/ Égalité de deux applications

1-3/ Image directe et image réciproque d'une partie

#### II- Restriction et prolongement d'une application

2-1/ Restriction d'une application

2-2/ Prolongement d'une application

#### III- Injectivité - Surjectivité - Bijectivité

3-1/ Application injective

3-2/ Application surjective

3-3/ Application bijective

3-4/ L'application réciproque d'une bijection

#### IV- Composition des applications

---

#### I- Application d'un ensemble vers un autre

1-1/ Applications

##### Définition

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

On appelle application de  $E$  vers  $F$  toute relation  $f$  qui, à tout élément  $x$  de  $E$  associe un unique élément  $y$  de  $F$ .

On écrit alors :  $y = f(x)$

L'application  $f$  est souvent notée de la manière suivante :  $f : E \rightarrow F$

$$x \mapsto f(x)$$

##### Remarque

On peut reformuler la définition d'une application comme suit :

$$(f \text{ est une application de } E \text{ vers } F) \Leftrightarrow [(\forall x \in E) (\exists! y \in F) ; y = f(x)]$$

## Définition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

L'ensemble  $E$  est appelé ensemble de départ de l'application  $f$ .

L'ensemble  $F$  est appelé ensemble d'arrivée de l'application  $f$ .

Pour tout  $x \in E$ , l'unique élément  $y$  de  $F$  tel que  $y = f(x)$  est appelé image de  $x$  par  $f$ .

Pour tout  $y \in F$ , tout élément  $x$  de  $E$  tel que  $y = f(x)$  (il peut ne pas exister, en exister un, en exister plus d'un) est appelé un antécédent de  $y$  par  $f$ .

On appelle graphe de l'application  $f$  l'ensemble des couples  $(x; f(x))$  lorsque  $x$  décrit  $E$ .

On le note  $G(f)$ . On a alors :  $G(f) = \{(x; y) \in E \times F / y = f(x)\}$

## Applications

On considère l'application  $f$  définie par :  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$(x; y) \mapsto x + y$$

1. Déterminer les antécédents de 0 par  $f$ .
2. Déterminer l'ensemble des antécédents des éléments 2 et 3.
3. L'implication suivante est-elle vraie :  $f(a; b) = f(c; d) \Rightarrow (a; b) = (c; d)$  ? Justifier la réponse.

On considère les ensembles  $E = \{-\sqrt{5}; -\sqrt{2}; -1; \sqrt{2}; \sqrt{5}\}$  et  $F = \{1; 2; 5\}$ .

4. Définir une application de  $E$  vers  $F$ .
5. Définir une application de  $F$  vers  $E$ .

## 1-2/ Égalité de deux applications

### Définition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$  et  $g$  une application d'un ensemble  $E'$  vers un ensemble  $F'$ .

On dit que les applications  $f$  et  $g$  sont égales et on écrit  $f = g$  si elles ont le même ensemble de départ ( $E = E'$ ), le même ensemble d'arrivée ( $F = F'$ ) et si  $(\forall x \in E) f(x) = g(x)$ .

### Applications

Dans chacun des cas suivants, montrer que les applications  $f$  et  $g$  sont égales :

1er cas :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - \cos^6 x - \sin^6 x \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3 \cos^2 x \cdot \sin^2 x \end{aligned}$$

2ème cas :

$$\begin{aligned} f &: \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - (\cos x - \sin x)^2 \quad \text{et} \quad g : \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \end{aligned}$$

3ème cas :

$$f : ]0; \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad \text{et} \quad g : ]0; \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

## 1-3/ Image directe et image réciproque d'une partie

### Définition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

Pour toute partie  $A$  de  $E$ , on définit l'image directe de  $A$  par  $f$ , notée  $f(A)$  par :

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$$

On a donc :  $y \in f(A) \Leftrightarrow [(\exists x \in A) ; y = f(x)]$

### Applications

On considère l'application :  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - 4\sqrt{x} + 1$$

1. Déterminer  $f([0; 4])$ .
2. Montrer que :  $f(]1; +\infty[) = [-3; +\infty[$

On considère l'application :  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cos x + \sin x$$

3. Justifier que pour tout  $x \in \mathbb{R} : (\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$
4. En déduire que :  $g(\mathbb{R}) \subset [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

### Proposition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ , et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

Alors :

- 1  $f(A) \subset F$
- 2  $A = \emptyset \Leftrightarrow f(A) = \emptyset$
- 3  $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- 4  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- 5  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

### Remarques

Attention, on n'a pas, en général  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

On peut par exemple examiner :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad A = [-2; -1] \quad \text{et} \quad B = [1; 2]$$

On trouve :  $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$  et  $f(A) \cap f(B) = [1; 4] \cap [1; 4] = [1; 4]$

### Définition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

Pour toute partie  $B$  de  $F$ , on définit l'image réciproque de  $B$  par  $f$ , notée  $f^{-1}(B)$  par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

On a donc :  $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

### Remarques

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ , et  $B$  une partie de  $F$ .

- On a  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  et  $f^{-1}(F) = E$ .
- Pour tout  $y \in F$  :  $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E / f(x) = y\}$
- L'égalité  $f^{-1}(B) = \emptyset$  ne signifie pas que  $B = \emptyset$ .

### Proposition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ , et  $A$  et  $B$  une partie de  $F$ .

Alors :

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & f^{-1}(A) \subset E \\ \boxed{2} \quad & A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \\ \boxed{3} \quad & f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ \boxed{4} \quad & f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

### Applications

On considère l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 + 2x$$

1. Déterminer  $f^{-1}([-1; 0])$  et  $f^{-1}([3; +\infty[)$ .

On considère l'application :  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$$

2. Déterminer  $g^{-1}([1; 2] \cup [5; +\infty[)$

## II- Restriction et prolongement d'une application

### 2-1/ Restriction d'une application

#### Définition

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application et  $A$  une partie de  $E$ .

On appelle restriction de  $f$  à la partie  $A$ , l'application  $g$  définie par :  $g : A \rightarrow F$

$$x \mapsto f(x)$$

On a alors  $A \subset E$  et  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x \in A$ .

#### Applications

On considère l'application  $g$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2x - |x| + 3$

1. Déterminer la restriction de l'application  $g$  à l'intervalle  $] -\infty; 0]$ .

Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 - 2x$

2. A-t-on l'implication  $(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$  ? Justifier votre réponse.
3. Montrer que la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1; +\infty[$  vérifie l'implication précédente.

### 2-2/ Prolongement d'une application

#### Définition

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application et  $G$  un ensemble tel que  $E \subset G$ .

On appelle prolongement de  $f$  à la partie  $G$ , toute application  $g$  définie de  $G$  vers  $F$  telle que :

$$(\forall x \in G) : g(x) = f(x)$$

### Remarque

La restriction d'une application à une partie est unique mais on a en général plusieurs prolongements possibles d'une application à un même ensemble.

## III- Injectivité - Surjectivité - Bijectivité

### 3-1/ Application injective

#### Définition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

On dit que l'application  $f$  est injective (on dit aussi que c'est une injection) si tout élément de  $F$  a au plus un antécédent dans  $E$  par l'application  $f$ .

Autrement dit, pour tout  $y \in F$ , l'équation  $y = f(x)$  admet au plus une solution  $x$  dans  $E$ .

Cela s'écrit :  $(\forall (x; x') \in E^2) : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

#### Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application  $f$  est injective :

$$\boxed{1} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{2018+|x|}$$

$$\boxed{2} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{3} f : ]-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - x$$

### 3-2/ Application surjective

#### Définition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

On dit que l'application  $f$  est surjective (on dit aussi que c'est une surjection) si tout élément de  $F$  a au moins un antécédent dans  $E$  par l'application  $f$ .

Autrement dit, pour tout  $y \in F$ , l'équation  $y = f(x)$  admet au moins une solution  $x$  dans  $E$ .

Cela s'écrit :  $(\forall y \in F) (\exists x \in E) : y = f(x)$

#### Proposition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ . Alors :

$$(f \text{ est surjective}) \Leftrightarrow f(E) = F$$

#### Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application  $f$  est surjective :

$$\begin{aligned} \boxed{1} f : ] - \infty; 3[ &\rightarrow ] - \infty; 2[ \\ x &\mapsto \frac{2x+1}{x-3} \\ \boxed{2} f : [1; +\infty[ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x^2 - x} \\ \boxed{3} f : \mathbb{R} &\rightarrow ] - 1; \sqrt{2}[ \\ x &\mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Soit  $g$  l'application :  $g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto n^3 - n$$

2. Montrer que  $g$  est injective.
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g(n)$  est paire.
4. En déduire que  $g$  n'est pas surjective.

Soit  $h$  l'application :  $h : \mathbb{R} \rightarrow F$

$$x \mapsto x^2 - 6x + 5$$

5. Déterminer  $F$  pour que  $h$  soit surjective.

### 3-3/ Application bijective

#### Définition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

On dit que l'application  $f$  est bijective (on dit aussi que c'est une bijection) si tout élément de  $F$  admet exactement un antécédent dans  $E$  par l'application  $f$ .

Autrement dit, pour tout  $y \in F$ , l'équation  $y = f(x)$  admet une solution unique  $x$  dans  $E$ .

Cela peut s'écrire :  $(\forall y \in F) (\exists! x \in E) : y = f(x)$

#### Remarque

Si on veut être précis en termes de vocabulaire, on doit dire :

- $f$  est une application de  $E$  vers  $F$ .
- $f$  est une injection de  $E$  vers  $F$ .
- $f$  est une surjection de  $E$  vers  $F$ .
- $f$  est une bijective de  $E$  vers  $F$ .

Néanmoins, dans la pratique, on n'est pas aussi méticuleux et on dit que  $f$  est une application, une injection, une surjection, une bijection de  $E$  vers  $F$  ou de  $E$  dans  $F$ .

#### Proposition

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ . Alors :

$f$  est bijective si, et seulement si,  $f$  est injective et surjective

#### Applications

Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}$  dans  $] -1; 1[$  par :  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1. Montrer que  $f$  est injective.
2. Montrer que  $f$  est surjective.

3. En déduire que  $f$  est bijective.

Soit  $g$  l'application définie de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$

4. Montrer que  $g$  est injective et surjective.

5. Que peut-on conclure de l'application  $g$  ?

### 3-4/ L'application réciproque d'une bijection

#### Définition

Soit  $f$  une application bijective d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ .

En associant à tout élément  $y \in F$  son unique antécédent par  $f$ , on définit une application de  $F$  dans  $E$ .

Cette application est appelée application réciproque de l'application  $f$  (ou simplement la réciproque de  $f$ ) et notée  $f^{-1}$ .

Elle est caractérisée par l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$$

#### Applications

On considère l'application :  $g : [1; +\infty[ \rightarrow [\sqrt{2}; +\infty[$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$$

1. Montrer que l'application  $g$  est bijective.

2. Déterminer son application réciproque  $g^{-1}$ .

## IV- Composition des applications

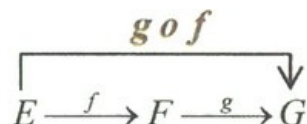
#### Définition

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ , et  $g$  une application de  $F$  dans  $G$ .

L'application  $h$  définie de  $E$  dans  $G$  par  $h(x) = g(f(x))$  est appelée composée des applications  $f$  et  $g$  dans cet ordre

Elle est notée  $g \circ f$  (se lit :  $g$  rond  $f$ ).

On a alors :  $(\forall x \in E) g \circ f(x) = g(f(x))$



#### Remarque

Attention ! il se peut que l'on puisse définir l'application  $g \circ f$  mais que l'on ne puisse pas définir l'application  $f \circ g$ .

Si l'on peut définir  $f \circ g$  et  $g \circ f$ , ces deux applications ne sont pas forcément égales, donc la composition des applications n'est pas une opération commutative.

Par contre, la composition des applications est une opération associative, c'est-à-dire : pour trois applications  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow H$ , on a :  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

## Applications

On considère les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2+4}{x^2+1} \text{ et } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$$

1. Déterminer  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  et  $g \circ g$ .

On considère les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto x^2 + 2 \text{ et } g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3 + \sqrt{x}$$

2. Déterminer  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  et  $f \circ f$ .

On considère les translations du plan  $t_{\vec{u}}$  et  $t_{\vec{v}}$ .

3. Déterminer l'application  $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$  (On rappelle que  $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ ).

## Proposition

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ , et  $g$  une application de  $F$  dans  $G$ .

- 1- Si les applications  $f$  et  $g$  sont injectives, alors l'application  $g \circ f$  est injective de  $E$  dans  $G$ .
- 2- Si les applications  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors l'application  $g \circ f$  est surjective de  $E$  dans  $G$ .
- 3- Si les applications  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors l'application  $g \circ f$  est bijective de  $E$  dans  $G$ , et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- 4- Si l'application  $f$  est bijective, alors :

$$(\forall x \in E) f^{-1} \circ f(x) = x \text{ et } (\forall x \in F) f \circ f^{-1}(x) = x$$

## Remarque

Si  $f$  est une application bijective de  $E$  vers  $F$  et  $f^{-1}$  son application réciproque, alors :

$$f^{-1} \circ f = Id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_F$$

où  $Id_E$  est l'application identique de  $E$  et  $Id_F$  est l'application identique de  $F$  définies par :

$$Id_E : E \rightarrow E$$

$$x \mapsto x \text{ et } Id_F : F \rightarrow F$$

$$x \mapsto x$$

## Applications

Soit  $E$  un ensemble non vide.

On considère l'application  $f$  définie de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(E)$  par :  $f(A) = \overline{A}$

1. Montrer que l'application  $f$  est injective.
2. Montrer que l'application  $f$  est surjective
3. En déduire que l'application  $f$  est bijective, puis déterminer sa bijection réciproque.

On considère l'application  $g$  définie de  $\left[0; \frac{1}{4}\right]$  dans  $\left[0; \frac{1}{4}\right]$  par :  $g(x) = x - \sqrt{x}$

4. Montrer que l'application  $g$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque.



On considère l'application :  $f : ]1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - 1 - 2\sqrt{x-1}$$

5. Déterminer  $f^{-1}(\{-\frac{1}{2}\})$ .

6. L'application  $f$  est-elle injective ? Justifier votre réponse.

7. Montrer que  $f(]1; +\infty[) = ]0; +\infty[$ .

8. L'application  $f$  est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

On considère l'application :  $g : ]0; +\infty[ \rightarrow ]-1; +\infty[$

$$x \mapsto x^2 - 2x$$

9. Déterminer une application  $h$  telle que  $f = g \circ h$ .

10. Montrer que les applications  $g$  et  $h$  sont surjectives et en déduire que  $f$  est surjective.

Soit  $h$  l'application définie de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; \sqrt{3}[$  par :  $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}$

11. Montrer que l'application  $h$  est bijective et donner sa bijection réciproque.