Mathématiques : 1Bac SM

Séance 3-1 : Applications (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Application d'un ensemble vers un autre

1-1/ Applications

Définition

Soit E et F deux ensembles non vides.

On appelle application de E vers F toute relation f qui, à tout élément x de E associe un unique élément y de F.

On écrit alors : $y = f(x)$

L'application f est souvent notée de la manière suivante : $f\ :\ E \to F$

$x \mapsto f(x)$

Remarque

On peut reformuler la définition d'une application comme suit :

$$(f \text{ est une application de } E \text{ vers } F) \Leftrightarrow [(\forall x \in E)(\exists! y \in F)\ ;\ y = f(x)]$$

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

L'ensemble E est appelé ensemble de départ de l'application f.

L'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de l'application f.

Pour tout $x \in E$, l'unique élément y de F tel que $y = f(x)$ est appelé image de x par f.

Pour tout $y \in F$, tout élément x de E tel que $y = f(x)$ (il peut ne pas exister, en exister un, en exister plus d'un) est appelé un antécédent de y par f.

On appelle graphe de l'application f l'ensemble des couples $(x; f(x))$ lorsque x décrit E.

On le note $G(f)$. On a alors : $G(f) = \{(x; y) \in E \times F / y = f(x)\}$

Applications

On considère l'application f définie par : $f\ :\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$(x; y) \mapsto x + y$

1. Déterminer les antécédents de 0 par f.
2. Déterminer l'ensemble des antécédents des éléments 2 et 3.
3. L'implication suivante est-elle vraie : $f(a; b) = f(c; d) \Rightarrow (a; b) = (c; d)$? Justifier la réponse.

On considère les ensembles $E = \left\{-\sqrt{5}; -\sqrt{2}; -1; \sqrt{2}; \sqrt{5}\right\}$ et $F = \{1; 2; 5\}$.

4. Définir une application de E vers F.
5. Définir une application de F vers E.

1-2/ Égalité de deux applications

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et g une application d'un ensemble E’ vers un ensemble F’.

On dit que les applications f et g sont égales et on écrit $f = g$ si elles ont le même ensemble de départ $(E = E’)$, le même ensemble d'arrivée $(F = F’)$ et si $(\forall x \in E)\ f(x) = g(x)$.

Applications

Dans chacun des cas suivants, montrer que les applications / et g sont égales :

<u>1er cas :</u>

$$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 - \cos^6 x - \sin^6 x \ \text{ et } \ g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3\cos^2 x . \sin^2 x$$

<u>2ème cas :</u>

$$\begin{aligned} f\ :\ \left]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1-(\cos x-\sin x)^2 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g\ :\ \left]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \end{aligned}$$

<u>3ème cas :</u>

$$\begin{aligned} f\ :\ ]0;\pi[&\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tfrac{\sin x}{1+\cos x} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g\ :\ ]0;\pi[&\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tfrac{1-\cos x}{\sin x} \end{aligned}$$

1-3/ Image directe et image réciproque d'une partie

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

Pour toute partie A de E, on définit l'image directe de A par f, notée $f(A)$ par :

$$f(A)=\{f(x)/x\in A\}$$

On a donc : $y\in f(A)\Leftrightarrow[(\exists x\in A)\ ;\ y=f(x)]$

Applications

On considère l'application : $f\ :\ \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x-4\sqrt{x}+1$

1. Déterminer $f([0;4])$.
2. Montrer que : $f(]1;+\infty[)=[-3;+\infty[$

On considère l'application : $g\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\cos x+\sin x$

3. Justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $(\cos x+\sin x)^2=1+2\sin x.\cos x$
4. En déduire que : $g(\mathbb{R})\subset\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F, et A et B deux parties de E.

Alors :

$$\boxed{1}\ f(A)\subset F$$
$$\boxed{2}\ A=\emptyset\Leftrightarrow f(A)=\emptyset$$
$$\boxed{3}\ A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$$
$$\boxed{4}\ f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$
$$\boxed{5}\ f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$$

Remarques

Attention, on n'a pas, en général $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

On peut par exemple examiner :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 \text{ et } A = [-2;-1] \text{ et } B = [1;2]$$

On trouve : $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(A) \cap f(B) = [1;4] \cap [1;4] = [1;4]$

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

Pour toute partie B de F, on définit l'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$ par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

On a donc : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Remarques

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F, et B une partie de F.

- On a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$.
- Pour tout $y \in F$: $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E / f(x) = y\}$
- L'égalité $f^{-1}(B) = \emptyset$ ne signifie pas que $B = \emptyset$.

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F, et A et B une partie de F.

Alors :

$$\boxed{1}\ f^{-1}(A) \subset E$$
$$\boxed{2}\ A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$
$$\boxed{3}\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$\boxed{4}\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Applications

On considère l'application : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 + 2x$

1. Déterminer $f^{-1}([-1;0])$ et $f^{-1}([3;+\infty[)$.

On considère l'application : $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$

2. Déterminer $g^{-1}(]1;2] \cup [5;+\infty[)$

II- Restriction et prolongement d’une application

2-1/ Restriction d’une application

Définition

Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E.

On appelle restriction de f à la partie , l'application g définie par : $g : A \to F$

$x \mapsto f(x)$

On a alors $A \subset E$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

Applications

On considère l'application g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - |x| + 3$

1. Déterminer la restriction de l'application g à l'intervalle $]-\infty; 0]$.

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x$

2. A-t-on l'implication $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2) : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$? Justifier votre réponse.
3. Montrer que la restriction de à l'intervalle $[1; +\infty[$ vérifie l'implication précédente.

2-2/ Prolongement d'une application

Définition

Soit $f : E \to F$ une application et G un ensemble tel que $E \subset G$.

On appelle prolongement de f à la partie G, toute application g définie de G vers F telle que :

$$(\forall x \in G) : g(x) = f(x)$$

Remarque

La restriction d'une application à une partie est unique mais on a en général plusieurs prolongements possibles d'une application à un même ensemble.

III- Injectivité - Surjectivité - Bijectivité

3-1/ Application injective

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que l'application f est injective (on dit aussi que c'est une injection) si tout élément de F a au plus un antécédent dans E par l'application f.

Autrement dit, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution x dans E.

Cela s'écrit : $(\forall (x;x) \in E^2) : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application f est injective :

$$\boxed{1}\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{2018+|x|}$$
$$\boxed{2}\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\boxed{3}\ f :]-\infty; 1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - x$$

3-2/ Application surjective

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que l'application f est surjective (on dit aussi que c'est une surjection) si tout élément de F a au moins un antécédent dans E par l'application f.

Autrement dit, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution x dans E.

Cela s'écrit : $(\forall y \in F)\,(\exists x \in E)\ :\ y = f(x)$

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. Alors :

$$(f \text{ est surjective}) \Leftrightarrow f(E) = F$$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application f est surjective :

$$\boxed{1}\ f\ :\ \left]-\infty;3\right[\to \left]-\infty;2\right[$$
$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$$
$$\boxed{2}\ f\ :\ \left[1;+\infty\right[\to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt{x^2-x}$$
$$\boxed{3}\ f\ :\ \mathbb{R}\Big] \to \Big]-1;\sqrt{2}\Big]$$
$$x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Soit g l'application : $g\ : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n^3 - n$

2. Montrer que g est injective.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n)$ est paire.
4. En déduire que g n'est pas surjective.

Soit h l'application : $h\ : \mathbb{R} \to F$
$x \mapsto x^2 - 6x + 5$

5. Déterminer F pour que h soit surjective.

3-3/ Application bijective

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que l'application f est bijective (on dit aussi que c'est une bijection) si tout élément de F admet exactement un antécédent dans E par l'application f.

Autrement dit, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet une solution unique x dans E.

Cela peut s'écrire : $(\forall y \in F)\,(\exists! x \in E)\ :\ y = f(x)$

Remarque

Si on veut être précis en termes de vocabulaire, on doit dire :

- f est une application de E vers F.
- f est une injection de E vers F.
- f est une surjection de E vers F.
- f est une bijective de E vers F.

Néanmoins, dans la pratique, on n'est pas aussi méticuleux et on dit que f est une application, une injection, une surjection, une bijection de E vers F ou de E dans F.

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. Alors :

f est bijective si, et seulement si, f est injective et surjective

Applications

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$ par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est surjective.
3. En déduire que f est bijective.

Soit g l'application définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$

4. Montrer que g est injective et surjective.
5. Que peut-en conclure de l'application g ?

3-4/ L'application réciproque d'une bijection

Définition

Soit f une application bijective d'un ensemble E vers un ensemble F.

En associant à tout élément $y \in F$ son unique antécédent par f, on définit une application de F dans E.

Cette application est appelée application réciproque de l'application f (ou simplement la réciproque de f) et notée f^{-1}.

Elle est caractérisée par l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{matrix}$$

Applications

On considère l'application : $g \ : \ \left[1;+\infty\right[\to \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

$x \mapsto \sqrt{x^2+x}$

1. Montrer que l'application g est bijective.
2. Déterminer son application réciproque g^{-1}.

IV- Composition des applications

Définition

Soit f une application de E vers F, et g une application de Fdans G.

L'application h définie de E dans G par $h\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$ est appelée composée des applications f et g dans cet ordre

Elle est notée $g\circ f$ (se lit : g rond f).

On a alors : $\left(\forall x\in E\right)\ g\circ f\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\,o\,f"] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Remarque

Attention ! il se peut que l'on puisse définir l'application $g\circ f$ mais que l'on ne puisse pas définir l'application $f\circ g$.

Si l'on peut définir $f\circ g$ et $g\circ f$, ces deux applications ne sont pas forcément égales, donc la composition des applications n'est pas une opération commutative.

Par contre, la composition des applications est une opération associative, c'est-à-dire : pour trois applications $f\ :\ E\rightarrow F$, $g\ :\ F\rightarrow G$ et $h\ :\ G\rightarrow H$, on a :
$h\circ\left(g\circ f\right)=\left(h\circ g\right)\circ f$

Applications

On considère les applications $f\ :\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{x^2+4}{x^2+1}$ et $g\ :\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{1}{3}x+2$

1. Déterminer $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ et $g\circ g$.

On considère les applications $f\ :\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$

$x\mapsto x^2+2$ et $g\ :\ \mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}$

$x\mapsto 3+\sqrt{x}$

2. Déterminer $f\circ g$, $g\circ f$ et $f\circ f$.

On considère les translations du plan $t_{\overrightarrow{u}}$ et $t_{\overrightarrow{v}}$.

3. Déterminer l'application $t_{\overrightarrow{u}}\circ t_{\overrightarrow{v}}$ (On rappelle que $t_{\overrightarrow{u}}\left(M\right)=M’\Leftrightarrow\overrightarrow{MM’}=\overrightarrow{u}$).

Proposition

Soit f une application de E vers F, et g une application de Fdans G.

1- Si les applications f et g sont injectives, alors l'application $g\circ f$ est injective de E dans G.

2- Si les applications f et g sont surjectives, alors l'application $g \circ f$ est surjective de E dans G.

3- Si les applications f et g sont bijectives, alors l'application $g \circ f$ est bijective de E dans G, et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

4- Si l'application f est bijective, alors :

$$(\forall x \in E)\ \ f^{-1} \circ f(x) = x \text{ et } (\forall x \in F)\ \ f \circ f^{-1}(x) = x$$

Remarque

Si f est une application bijective de E vers F et f^{-1} son application réciproque, alors :

$$f^{-1} \circ f = Id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_F$$

où Id_E est l'application identique de E et Id_F est l'application identique de F définies par :

$$Id_E \ : \ E \to E$$
$$x \mapsto x \text{ et } Id_F \ : \ F \to F$$
$$x \mapsto x$$

Applications

Soit E un ensemble non vide.

On considère l'application f définie de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ par : $f(A) = \overline{A}$

1. Montrer que l'application f est injective.
2. Montrer que l'application f est surjective
3. En déduire que l'application f est bijective, puis déterminer sa bijection réciproque.

On considère l'application g définie de $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ dans $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ par : $g(x) = x - \sqrt{x}$

4. Montrer que l'application g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

On considère l'application : $f \ : \ [1; +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto x - 1 - 2\sqrt{x-1}$

5. Déterminer $f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$.
6. L'application f est-elle injective ? Justifier votre réponse.
7. Montrer que $f([1; +\infty[) = [0; +\infty[$.
8. L'application f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

On considère l'application : $g \ : \ [0; +\infty[\to]-1; +\infty[$
$x \mapsto x^2 - 2x$

9. Déterminer une application h telle que $f = g \circ h$.
10. Montrer que les applications g et h sont surjectives et en déduire que f est surjective.

Soit h l'application définie de $]1;+\infty[$ dans $\left]1;\sqrt{3}\right[$ par : $h\left(x\right)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}$

11. Montrer que l'application h est bijective et donner sa bijection réciproque.