Mathématiques : 1Bac SM

Séance 3-1 : Applications (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Application d'un ensemble vers un autre

1-1/ Applications

Définition

Soit E et F deux ensembles non vides.

On appelle application de E vers F toute relation f qui, à tout élément x de E associe un unique élément y de F.

On écrit alors : $y = f(x)$

L'application f est souvent notée de la manière suivante : $f \ : \ E \to F$
$x \mapsto f(x)$

Remarque

On peut reformuler la définition d'une application comme suit :

$$(f \text{ est une application de } E \text{ vers } F) \Leftrightarrow [(\forall x \in E)(\exists! y \in F)\ ;\ y = f(x)]$$

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

L'ensemble E est appelé ensemble de départ de l'application f.

L'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de l'application f.

Pour tout $x \in E$, l'unique élément y de F tel que $y = f(x)$ est appelé image de x par f.

Pour tout $y \in F$, tout élément x de E tel que $y = f(x)$ (il peut ne pas exister, en exister un, en exister plus d'un) est appelé un antécédent de y par f.

On appelle graphe de l'application f l'ensemble des couples $(x; f(x))$ lorsque x décrit E.

On le note $G(f)$. On a alors : $G(f) = \{(x; y) \in E \times F / y = f(x)\}$

Applications

On considère l'application f définie par : $f\ :\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$(x; y) \mapsto x + y$

1. Déterminer les antécédents de 0 par f.
2. Déterminer l'ensemble des antécédents des éléments 2 et 3.
3. L'implication suivante est-elle vraie : $f(a; b) = f(c; d) \Rightarrow (a; b) = (c; d)$? Justifier la réponse.

On considère les ensembles $E = \left\{-\sqrt{5}; -\sqrt{2}; -1; \sqrt{2}; \sqrt{5}\right\}$ et $F = \{1; 2; 5\}$.

4. Définir une application de E vers F.
5. Définir une application de F vers E.

1-2/ Égalité de deux applications

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et g une application d'un ensemble E' vers un ensemble F'.

On dit que les applications f et g sont égales et on écrit $f = g$ si elles ont le même ensemble de départ ($E = E$'), le même ensemble d'arrivée ($F = F$') et si $(\forall x \in E)\ f(x) = g(x)$.

Applications

Dans chacun des cas suivants, montrer que les applications / et g sont égales :

1er cas :

$$\begin{array}{c} f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - \cos^6 x - \sin^6 x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3\cos^2 x . \sin^2 x \end{array}$$

2ème cas :

$$\begin{array}{c} f\ :\ \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - (\cos x - \sin x)^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} g\ :\ \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \end{array}$$

3ème cas :

$$f :]0;\pi[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{\sin x}{1+\cos x}\quad\text{et}\quad g :]0;\pi[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

1-3/ Image directe et image réciproque d'une partie

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

Pour toute partie A de E, on définit l'image directe de A par f, notée $f(A)$ par :

$$f(A)=\{f(x)/x\in A\}$$

On a donc : $y\in f(A)\Leftrightarrow[(\exists x\in A)\ ;\ y=f(x)]$

Applications

On considère l'application : $f : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x-4\sqrt{x}+1$

1. Déterminer $f([0;4])$.
2. Montrer que : $f(]1;+\infty[)=[-3;+\infty[$

On considère l'application : $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\cos x+\sin x$

3. Justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $(\cos x+\sin x)^2=1+2\sin x.\cos x$
4. En déduire que : $g(\mathbb{R})\subset\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F, et A et B deux parties de E.

Alors :

$$\boxed{1}\ f(A)\subset F$$
$$\boxed{2}\ A=\emptyset\Leftrightarrow f(A)=\emptyset$$
$$\boxed{3}\ A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$$
$$\boxed{4}\ f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$
$$\boxed{5}\ f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$$

Remarques

Attention, on n'a pas, en général $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

On peut par exemple examiner :

$$f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^2\ \text{et}\ A=[-2;-1]\ \text{et}\ B=[1;2]$$

On trouve : $f(A\cap B)=f(\emptyset)=\emptyset$ et $f(A)\cap f(B)=[1;4]\cap[1;4]=[1;4]$

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

Pour toute partie B de F, on définit l'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$ par :

$$f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}$$

On a donc : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Remarques

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F, et B une partie de F.

- On a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$.

- Pour tout $y \in F$: $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E / f(x) = y\}$

- L'égalité $f^{-1}(B) = \emptyset$ ne signifie pas que $B = \emptyset$.

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F, et A et B une partie de F.

Alors :

$$\boxed{1}\ f^{-1}(A) \subset E$$
$$\boxed{2}\ A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$
$$\boxed{3}\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$\boxed{4}\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Applications

On considère l'application : $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 + 2x$

1. Déterminer $f^{-1}([-1;0])$ et $f^{-1}([3;+\infty[)$.

On considère l'application : $g\ :\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$

2. Déterminer $g^{-1}(]1;2] \cup [5;+\infty[)$

II- Restriction et prolongement d'une application

2-1/ Restriction d'une application

Définition

Soit $f\ :\ E \to F$ une application et A une partie de E.

On appelle restriction de f à la partie , l'application g définie par : $g\ :\ A \to F$

$x \mapsto f(x)$

On a alors $A \subset E$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

Applications

On considère l'application g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - |x| + 3$

1. Déterminer la restriction de l'application g à l'intervalle $]-\infty;0]$.

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x$

2. A-t-on l'implication $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right) :\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$? Justifier votre réponse.
3. Montrer que la restriction de à l'intervalle $[1;+\infty[$ vérifie l'implication précédente.

2-2/ Prolongement d'une application

Définition

Soit $f\ :\ E \rightarrow F$ une application et G un ensemble tel que $E \subset G$.

On appelle prolongement de f à la partie G, toute application g définie de G vers F telle que :

$$(\forall x \in G)\ :\ g(x) = f(x)$$

Remarque

La restriction d'une application à une partie est unique mais on a en général plusieurs prolongements possibles d'une application à un même ensemble.

III- Injectivité - Surjectivité - Bijectivité

3-1/ Application injective

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que l'application f est injective (on dit aussi que c'est une injection) si tout élément de F a au plus un antécédent dans E par l'application f.

Autrement dit, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution x dans E.

Cela s'écrit : $\left(\forall (x; x) \in E^2\right)\ :\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application f est injective :

$$\boxed{1}\ f\ :\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{2018+|x|}$$
$$\boxed{2}\ f\ :\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\boxed{3}\ f\ :\ \left]-\infty; 1\right] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - x$$

3-2/ Application surjective

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que l'application f est surjective (on dit aussi que c'est une surjection) si tout élément de F a au moins un antécédent dans E par l'application f.

Autrement dit, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution x dans E.

Cela s'écrit : $(\forall y \in F)\,(\exists x \in E)\ :\ y = f(x)$

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. Alors :

$$(f \text{ est surjective}) \Leftrightarrow f(E) = F$$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application f est surjective :

$$\boxed{1}\ f\ :\ \left]-\infty;3\right[\to\ \left]-\infty;2\right[$$
$$x\mapsto \frac{2x+1}{x-3}$$
$$\boxed{2}\ f\ :\ \left[1;+\infty\right[\to\mathbb{R}^+$$
$$x\mapsto\sqrt{x^2-x}$$
$$\boxed{3}\ f\ :\ \mathbb{R}\Big]\to\Big]-1;\sqrt{2}\Big]$$
$$x\mapsto\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Soit g l'application : $g\ :\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$

$n\mapsto n^3-n$

2. Montrer que g est injective.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $g(n)$ est paire.
4. En déduire que g n'est pas surjective.

Soit h l'application : $h\ :\mathbb{R}\to F$

$x\mapsto x^2-6x+5$

5. Déterminer F pour que h soit surjective.

3-3/ Application bijective

Définition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que l'application f est bijective (on dit aussi que c'est une bijection) si tout élément de F admet exactement un antécédent dans E par l'application f.

Autrement dit, pour tout $y\in F$, l'équation $y=f(x)$ admet une solution unique x dans E.

Cela peut s'écrire : $(\forall y\in F)\,(\exists! x\in E)\ :\ y=f(x)$

Remarque

Si on veut être précis en termes de vocabulaire, on doit dire :

- f est une application de E vers F.
- f est une injection de E vers F.
- f est une surjection de E vers F.
- f est une bijective de E vers F.

Néanmoins, dans la pratique, on n'est pas aussi méticuleux et on dit que f est une application, une injection, une surjection, une bijection de E vers F ou de E dans F.

Proposition

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. Alors :

$$f \text{ est bijective si, et seulement si, } f \text{ est injective et surjective}$$

Applications

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$ par : $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est surjective.

3. En déduire que f est bijective.

Soit g l'application définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$

4. Montrer que g est injective et surjective.
5. Que peut-en conclure de l'application g ?

3-4/ L'application réciproque d'une bijection

Définition

Soit f une application bijective d'un ensemble E vers un ensemble F.

En associant à tout élément $y \in F$ son unique antécédent par f, on définit une application de F dans E.

Cette application est appelée application réciproque de l'application f (ou simplement la réciproque de f) et notée f^{-1}.

Elle est caractérisée par l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{matrix}$$

Applications

On considère l'application : $g\ :\ \left[1;+\infty\right[\to \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

$x \mapsto \sqrt{x^2+x}$

1. Montrer que l'application g est bijective.
2. Déterminer son application réciproque g^{-1}.

IV- Composition des applications

Définition

Soit f une application de E vers F, et g une application de Fdans G.

L'application h définie de E dans G par $h(x) = g(f(x))$ est appelée composée des applications f et g dans cet ordre

Elle est notée $g \circ f$ (se lit : g rond f).

On a alors : $(\forall x \in E)\ g \circ f(x) = g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g o f"] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Remarque

Attention ! il se peut que l'on puisse définir l'application $g \circ f$ mais que l'on ne puisse pas définir l'application $f \circ g$.

Si l'on peut définir $f \circ g$ et $g \circ f$, ces deux applications ne sont pas forcément égales, donc la composition des applications n'est pas une opération commutative.

Par contre, la composition des applications est une opération associative, c'est-à-dire : pour trois applications $f\ :\ E \to F$, $g\ :\ F \to G$ et $h\ :\ G \to H$, on a : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Applications

On considère les applications $f\ :\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$
 $x\mapsto\frac{x^2+4}{x^2+1}$ et $g\ :\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$
 $x\mapsto\frac{1}{3}x+2$

1. Déterminer $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ et $g\circ g$.

On considère les applications $f\ :\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$
 $x\mapsto x^2+2$ et $g\ :\ \mathbb{R}^{+}\rightarrow\mathbb{R}$
 $x\mapsto 3+\sqrt{x}$

2. Déterminer $f\circ g$, $g\circ f$ et $f\circ f$.

On considère les translations du plan $t_{\overrightarrow{u}}$ et $t_{\overrightarrow{v}}$.

3. Déterminer l'application $t_{\overrightarrow{u}}\circ t_{\overrightarrow{v}}$ (On rappelle que $t_{\overrightarrow{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{u}$).

Proposition

Soit f une application de E vers F, et g une application de Fdans G.

1- Si les applications f et g sont injectives, alors l'application $g\circ f$ est injective de E dans G.

2- Si les applications f et g sont surjectives, alors l'application $g\circ f$ est surjective de E dans G.

3- Si les applications f et g sont bijectives, alors l'application $g\circ f$ est bijective de E dans G, et on a :

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

4- Si l'application f est bijective, alors :

$$(\forall x\in E)\ \ f^{-1}\circ f(x)=x \text{ et } (\forall x\in F)\ \ f\circ f^{-1}(x)=x$$

Remarque

Si f est une application bijective de E vers F et f^{-1} son application réciproque, alors :

$$f^{-1}\circ f=Id_E \text{ et } f\circ f^{-1}=Id_F$$

où Id_E est l'application identique de E et Id_F est l'application identique de F définies par :

$$Id_E\ :\ E\rightarrow E$$
$$x\mapsto x \text{ et } Id_F\ :\ F\rightarrow F$$
$$x\mapsto x$$

Applications

Soit E un ensemble non vide.

On considère l'application f définie de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ par : $f(A)=\overline{A}$

1. Montrer que l'application f est injective.
2. Montrer que l'application f est surjective
3. En déduire que l'application f est bijective, puis déterminer sa bijection réciproque.

On considère l'application g définie de $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ dans $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ par : $g(x)=x-\sqrt{x}$

4. Montrer que l'application g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

On considère l'application : $f \;:\; [1;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto x-1-2\sqrt{x-1}$

5. Déterminer $f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$.
6. L'application f est-elle injective ? Justifier votre réponse.
7. Montrer que $f\left([1;+\infty[\right) = [0;+\infty[$.
8. L'application f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

On considère l'application : $g \;:\; [0;+\infty[\to]-1;+\infty[$
$x \mapsto x^2-2x$

9. Déterminer une application h telle que $f = g\circ h$.
10. Montrer que les applications g et h sont surjectives et en déduire que f est surjective.

Soit h l'application définie de $]1;+\infty[$ dans $\left]1;\sqrt{3}\right[$ par : $h\left(x\right) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}$

11. Montrer que l'application h est bijective et donner sa bijection réciproque.