

Sommaire

V- Lois logiques et raisonnements

5-1/ Loi logique ou tautologie

5-2/ Lois de Morgan

5-3/ Raisonnement par contraposée

5-4/ Raisonnement par l'absurde

5-5/ Raisonnement par disjonction des cas

5-6/ Raisonnement par récurrence

V- Lois logiques et raisonnements

5-1/ Loi logique ou tautologie

Définition

Soit Q_1, Q_2, \dots, Q_n des propositions.

On appelle loi logique ou tautologie toute proposition P résultante de l'assemblage par des connecteurs logiques de propositions prises parmi Q_1, Q_2, \dots, Q_n qui est vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions en jeu.

Applications

Soit P et Q deux propositions.

1. Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

$$\begin{aligned} P &\Rightarrow (Q \Rightarrow P) \\ P &\Rightarrow (\bar{P} \Rightarrow Q) \\ (\bar{Q} \text{ ou } P) &\text{ ou } (Q \text{ ou } \bar{P}) \\ (P \Leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})] \end{aligned}$$

5-2/ Lois de Morgan

Proposition

Soit P et Q deux propositions.

Les deux propositions suivantes sont des lois logiques :

$$\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$$

$$\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$$

Applications

Soit P et Q deux propositions.

- Déterminer la négation des propositions suivantes :

$$P : \ll (\exists x \in \mathbb{R}) 0 \leq x < 1 \gg$$

$$Q : \ll (\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 = 1 \Rightarrow x = 1) \gg$$

$$R : \ll (\forall a \in \mathbb{R}) (|a + 1| \leq 2 \Rightarrow a \geq -3) \gg$$

$$S : \ll (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}^+) (x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow -y \leq x \leq y) \gg$$

5-3/ Raisonnement par contraposée

Proposition

Soit P et Q deux propositions.

L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la contraposée (ou l'implication contraposée) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

La contraposée d'une implication est équivalente à celle-ci :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

Remarques

Il faut bien distinguer entre la négation, la contraposée et la réciproque :

- La négation de $P \Rightarrow Q$ est $(P \text{ et } \overline{Q})$.
- La réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$.
- La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Le recours au raisonnement par contraposée n'est évidemment pertinent que si cette contraposée est plus facile à prouver que l'implication directe.

Applications

- En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer les implications suivantes :

$$\boxed{1} (\forall x \in [-1; +\infty[) (x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \neq 1 + \frac{x}{2})$$

$$\boxed{2} (\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 \neq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \neq 1)$$

$$\boxed{3} (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) (4y \neq -3x \Rightarrow x - y \neq 7(x + y))$$

$$\boxed{4} (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) ((xy - 1)(x - y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2 + y + 1) \neq y(x^2 + x + 1))$$

$$\boxed{5} (\forall (x; y) \in (]1; +\infty[)^2) (x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y)$$

$$\boxed{6} (\forall x \in \mathbb{R}) (x \notin [-1; 4] \Rightarrow x^2 - 3x - 4 > 0)$$

$$\boxed{7} (\forall x \in \mathbb{R}^+) (x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} \neq 1 - \sqrt{x})$$

$$\begin{aligned} & \boxed{8} (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) (x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow |x + y| \leq 2) \\ \boxed{9} (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) & \left(|2x^2 + 5xy + 3y^2| \leq 3 \Rightarrow \left(|x + y| \leq 3 \text{ ou } |2x + 3y| \leq \sqrt{3} \right) \right) \\ \boxed{10} (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) & \left(x^2 + xy + y^2 \leq 3 \Rightarrow \left(|x + 2y| \leq 2\sqrt{3} \text{ et } |x| \leq 2 \right) \right) \end{aligned}$$

5-4/ Raisonnement par l'absurde

Proposition

Soit P et Q deux propositions.

La proposition suivante est une loi logique :

$$[(\bar{P} \Rightarrow Q) \text{ et } (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q})] \Rightarrow P$$

Applications

Soit a, b et c des réels positifs tels que $ab < c$.

1. Montrer que : $a < \sqrt{c}$ ou $b < \sqrt{c}$

Soit f une fonction numérique définie sur \mathbb{R} telle que pour tout $(x; y) \in (\mathbb{R}^*)^2$: $f(xy) = f(x)f(y)$

On suppose que $f(1) \neq 0$.

2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) \neq 0$
3. Montrer par l'absurde que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \sqrt{4n+2} \notin \mathbb{N}$

5-5/ Raisonnement par disjonction des cas

Proposition

Soit P et Q deux propositions.

La proposition suivante est une loi logique :

$$[(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R]$$

Applications

1. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$(I_1) |x^2 - 4| - x^2 > 0$$

$$(I_2) |2x - 1| + |2x + 1| + |x| \geq 4$$

$$(I_3) \sqrt{3-x} + x < 0$$

2. Montrer que le produit de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 6.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a) x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

$$b) |x| + |x + 1| + |x - 1| \neq 0$$

$$c) |x - 1| \leq x^2 - 2x + 2$$

Soit a, b et c trois réels tels que c est positif.

4. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, montrer les deux implications suivantes :

$$(|a| \leq c \text{ et } |b| \leq c) \Rightarrow |a + b| + |a - b| \leq 2c$$

$$|a + b| + |a - 2b| \leq 3c \Rightarrow (|a| \leq 2c \text{ et } |b| \leq c)$$

Soit n un entier naturel.

- Démontrer que si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- Déduire que si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

5-6/ Raisonnement par récurrence

Proposition

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle qui dépend d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si la proposition $P(n_0)$ est vraie et si l'implication « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors, la proposition $P(n)$ est vraie, pour tout entier $n \geq n_0$.

Applications

- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ est divisible par 23

Soit a et b deux réels distincts et strictement positifs.

- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$