

## I- Exercice 1

### Partie 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x} \ln^2(x)$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et interpréter les résultats.
2. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. Montrer que  $f$  admet deux points d'inflexion.
4. Représenter  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormée  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$  (on prend  $e^2 \cong 7,4$  et  $\frac{4}{e^2} \cong 0,6$ ).
5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{C}_f)$ ,  $(O; \vec{i})$ , les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e^2$ .

### Partie 2

( $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ), on pose  $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx$ .

1. Calculer  $I_1$ .
2. Montrer que ( $\forall p \in \mathbb{N}^*$ )  $I_{p+1} = \frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$ .
3. En déduire  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$ .
4. Interpréter géométriquement  $\pi \cdot I_4$ .

### Partie 3

On pose  $F(x) = \int_{\ln x}^{1+\ln x} f(t) dt$ .

1. Montrer que  $F$  est définie sur  $I = ]1; +\infty[$ .
2. Montrer que ( $\forall x \in I$ ) ( $\exists \beta \in [\ln x; \ln x + 1]$ ) /  $F(x) = f(\beta)$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

( $\forall \alpha \in ]0; 1[$ ), on pose  $A(x) = \int_\alpha^1 f(t) dt$ .

3. Calculer  $A(x)$  en fonction de  $\alpha$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$ .
4. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $I$ , puis calculer  $F'(x)$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $u_n = \int_1^{\frac{1}{n}+1} f(nt) dt$

5. Montrer que  $u_n = \frac{1}{n} \cdot \int_1^{1+n} f(t) dt$ .
6. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## II- Exercice 2

Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormée  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On considère l'application  $F : P \rightarrow P$ , qui laisse invariant  $\Omega$  et qui associe à chaque point  $M(Z)$  de  $P - \{\Omega\}$  le point  $M'(Z')$  tel que  $\Omega MM'$  est un triangle rectangle en  $M$  et  $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

1. Déterminer l'écriture complexe de  $F$ .
  2. Montrer que  $\Omega$  est le seul point invariant par  $F$ .
- Soit  $R\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

3. Montrer que  $F = R \circ h$  avec  $h$  une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

Soit  $H$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $(\Omega M')$ , et on pose :  $F(H) = M''$

4. Montrer que  $\Omega, M, M'$  et  $M''$  sont cocycliques.

## III- Exercice 3

Soit  $m$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que  $m^2$  et  $m - 1$  sont premiers entre eux.
2. En déduire que l'équation  $(E) : m^2x + (m - 1)y = 1$  admet au moins une solution.
3. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E)$ .

On pose  $m = 7$ .

4. Montrer que  $4 \circ 1$  est un nombre premier.
5. En déduire que  $2011^{49^2} \equiv 2011 [401]$ .

## IV- Exercice 4

On pose  $E$  l'ensemble de couples  $(a, b)$  tel que  $a \neq -1$ , et on considère l'application  $f_{(a,b)}$  définie par :

$$f_{(a,b)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ Z = x + iy \rightarrow Z' = x' + iy' / \begin{cases} x' = (1+a)x + y \\ y' = y + b \end{cases}$$

1. Vérifier que  $(\forall (a, b) \in E) (\forall (a', b') \in E) f_{(a',b')} \circ f_{(a,b)} = f_{(a+a'+aa', b+b')}$ ,
2. Montrer que "  $\circ$  " est une loi de composition interne dans l'ensemble  $A = \{f_{(a,b)} / (a, b) \in E\}$ .
3. Montrer que  $(\forall (a, b) \in E) f_{(a,b)}^{-1} = f_{\left(\frac{-a}{1+a}, -b\right)}$ .
4. Montrer que  $(A, \circ)$  est un groupe commutatif.

On définit sur  $E$  la loi de composition interne "  $T$  " par

$$(\forall (a, b) \in E) (\forall (a', b') \in E) (a, b)T(a', b') = (a + a' + aa', b + b').$$

On considère l'application :  $h : A \rightarrow E$

$$f_{(a,b)} \rightarrow (a, b)$$

5. Montrer que  $h$  est un isomorphisme de  $(A, \circ)$  vers  $(E, T)$ .

6. En déduire la structure que  $(E, T)$ .

7. Déterminer l'élément neutre de  $(E, T)$ , et le symétrique d'un élément  $(a, b)$  de  $(E, T)$ .

On pose :  $H = \{(x, \ln x + 1) / x > -1\}$

8. Montrer que  $(H, T)$  est un groupe commutatif.