Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 2 Devoir 1 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

Partie 1

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}\ln^2(x)$

1. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter les résultats.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que f admet deux points d'inflexion.
4. Représenter $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormée $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ avec $||\vec{i}||=1cm$ (on prend $e^2\cong 7,4$ et $\frac{4}{e^2}\cong 0,6$).
5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $\left(O;\vec{i}\right)$, les droites d'équation $x=1$ et $x=e^2$.

Partie 2

$(\forall p\in\mathbb{N}^*)$, on pose $I_p=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^p}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que $(\forall p\in\mathbb{N}^*)$ $I_{p+1}=\frac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_p$.
3. En déduire I_2, I_3 et I_4.
4. Interpréter géométriquement $\pi.I_4$.

Partie 3

On pose $F(x)=\int_{\ln x}^{1+\ln x} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

1. Montrer que F est définie sur $I=]1;+\infty[$.
2. Monter que $(\forall x\in I)\,(\exists\beta\in[\ln x:\ln x+1])\ /\ F(x)=f(\beta)$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty}F(x)$.

$(\forall\alpha\in]0;1[)$, on pose $A(x)=\int_\alpha^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

3. Calculer $A(x)$ en fonction de α, puis calculer $\lim_{x\to 1^+}F(x)$.
4. Montrer que F est dérivable sur I, puis calculer $F'(x)$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n=\int_1^{\frac{1}{n}+1} f(nt)\,\mathrm{d}\,t$

5. Montrer que $u_n=\frac{1}{n}.\int_1^{1+n} f(t)\,\mathrm{d}\,t$.
6. Calculer $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

II- Exercice 2

Le plan P est rapporté à un repère orthonormée $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

On considère l'application $F\ :\ P \to P$, qui laisse invariant $\Omega\,(i)$ et qui associe à chaque point $M(Z)$ de $P - \{\Omega\}$ le point M'$(Z$'$)$ tel que ΩMM' est un triangle rectangle en M et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

1. Déterminer l'écriture complexe de F.
2. Montrer que Ω est le seul point invariant par F.

Soit $R\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$ la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3. Montrer que $F = R \circ h$ avec h une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

Soit H la projection orthogonale de M sur $(\Omega M$'$)$, et on pose : $F\,(H) = M\,$"

4. Montrer que Ω, M, M' et $M\,$" sont cocycliques.

III- Exercice 3

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que m^2 et $m-1$ sont premiers entre eux.
2. En déduire que l'équation (E) : $m^2x + (m-1)y = 1$ admet au moins une solution.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

On pose $m = 7$.

4. Montrer que $4 \circ 1$ est un nombre premier.
5. En déduire que $2011^{49^2} \equiv 2011\ [401]$.

IV- Exercice 4

On pose E l'ensemble de couples (a, b) tel que $a \neq -1$, et on considère l'application $f_{(a,b)}$ définie par :

$$f_{(a,b)} :\subseteq \to :\subseteq$$
$$Z = x + iy \to Z' = x' + iy'/ \begin{cases} x' = (1+a)x + x \\ y' = y + b \end{cases}$$

1. Vérifier que $(\forall\,(a,b) \in E)\,(\forall\,(a',b') \in E)\ f_{(a',b')} \circ f_{(a,b)} = f_{(a+a'+aa',b+b')}$,
2. Montrer que " $\circ$ " est une loi de composition interne dans l'ensemble $A = \left\{f_{(a,b)}/\,(a,b) \in E\right\}$.
3. Montrer que $(\forall\,(a,b) \in E)\ f^{-1}{}_{(a,b)} = f_{\left(\frac{-a}{1+a}, -b\right)}$.
4. Montrer que $(A, \circ)$ est un groupe commutatif.

On définie sur E la loi de composition interne " T " par
$(\forall\,(a,b) \in E)\,(\forall\,(a',b') \in E)\ \ (a,b)T\,(a',b') = (a + a' + aa', b + b')$.

On considère l'application : $h: \ A \to E$

$f_{(a,b)} \to (a,b)$

5. Montrer que h est un isomorphisme de $(A,\circ)$ vers (E,T).
6. En déduire la structure que (E,T).
7. Déterminer l'élément neutre de (E,T), et le symétrique d'un élément (a,b) de (E,T).

On pose : $H = \{(x, \ln x + 1)/x > -1\}$

8. Montrer que (H,T) est un groupe commutatif.