AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 1 Devoir 3 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1 (8 pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. Étudier la parité de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, interpréter le résultat.
3. Montrer que .$(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$
4. Étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation.
5. Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$.
6. Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
7. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ une seule solution α.
8. Montrer que $(\forall x \in I)$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$)n définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
10. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
11. Déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

II- Exercice 2 (7 pts)

Soit n un entier non nul.

On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = e^x + \frac{x}{n}$.

1. Calculer les limites de f_n.

2) Étudier les variations de f_n, et dresser le tableau de variation.

3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution a_n, et que $a_n \in]-\infty; 0[$.
4. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.
5. Montrer que $f_n\left(-\ln\sqrt{n}\right) > 0$, et déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.
6. Déterminer le signe $f_n(-\ln(n)) > 0$, déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$.
7. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\frac{a_n}{\ln(n)} = -1 + \frac{\ln(-a_n)}{\ln(n)}$, puis déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\ln(n)} = -1$.

III- Exercice 3 (5 pts)

On pose $g(z) = \frac{1-z}{\bar{z}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $g(z) = 1 - i$.
2. Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C}^*)$ $g(z) = \overline{g(z)} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0$.
3. En déduire l'ensemble $E = \{M(z) \in P / g(z) \in \mathbb{R}\}$.

On pose $z = e^{i\theta}$.

4. Montrer que $1 - \cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, puis déterminer $g(z)$ sous forme trigonométrique.