

I- Exercice 1 (7 pts)

Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme : $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \dots + X - 1$

1. Démontrer que P_n possède une seule racine dans \mathbb{R}^+ , que l'on note u_n .
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
3. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{2}$.

Soit $\rho \in]\frac{1}{2}; 1[$.

4. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\rho) > 0$.
5. Démontrer que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

II- Exercice 2 (13 pts)

Partie 1

soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

1. Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.
2. Montrer que $g'(x) = -\frac{-1}{x(x+1)^2}$, et donner le tableau de variation de g .
3. Déduire que $(\forall x > 0) g(x) > 0$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue à droite de 0.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, et donner une interprétation géométrique du résultat.
3. Étudier la branche infinie de (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
4. Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f , puis donner le tableau de variation.
5. Construire la courbe (\mathcal{C}_f) .

Partie 3

Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite telle que $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, et on pose $v_n = \ln u_n$.

1. Vérifier que $v_n = f(n)$, et déduire que $(u_n)_{n>0}$ est croissante.
2. Montrer que $(\forall x > 0) \ln(1+x) < x$, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n < e$, puis calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{v_k}{k}$.

3. Exprimer S_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.