Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Semestre 1 Devoir 3 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$

1. Vérifier que $g(1) = 0$.
2. À partir du tableau de variations de la fonction g, montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$, et que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :
$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 1cm).

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, et interpréter géométriquement le résultat.
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
5. Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.
6. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$.
7. Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$, et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
8. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
9. Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation $\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0$.
10. En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.
11. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;2]$, et en déduire la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (D) sur l'intervalle $[1;2]$.
12. Construire, dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (On admettra que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est

comprise entre $2,4$ et $2,5$).

II- Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = \sqrt{2}\,(-1+i)$ et $c = \sqrt{2}\,(-1-i)$.

Soit E d'affixe e le milieu de segment $[AB]$.

1. Donner une forme trigonométrique des nombres complexes a, b et c.
2. Placer les points A, B et C sur le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
3. Montrer que le triangle OAB est isocèle, puis déduire un mesure de l'angle orienté $\overline{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OE}\right)}$.
4. Déterminer e, puis $|e|$.
5. Déduire $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.