

## I- Exercice 1

### Partie 1

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - x$

1. Vérifier que  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = x \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \right)$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , et étudier la branche infinie de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
3. Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .
5. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
6. Montrer que  $(\forall x \in ]0; 1[) : f(x) - x = x \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2 \right)$ .
7. En déduire que  $(\forall x \in ]0; 1[) : f(x) > x$ .
8. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1; +\infty[$ .
9. Montrer que le réel  $\alpha$  vérifie  $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$ , puis en déduire la valeur de  $\alpha$ .

### Partie 2

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{8} \leq u_n < 1$
2. Déterminer le sens des variations de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

## II- Exercice 2

On considère la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}} \\ u_0 = 0 \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

1. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$ .
2. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \geq \frac{1+u_n}{2}$ .
3. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
4. Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (1 - u_n)$ .
5. En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .
6. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

