

### I- Exercice 1

1. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x - 1} - 2x - 1 &= \end{aligned}$$

### II- Exercice 2

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$  et à valeurs dans l'intervalle  $[a, b]$  :

$$(\forall x \in [a, b] ; f(x) \in [a, b])$$

1. Montrer que la fonction  $f$  admet au moins un point fixe (càd  $\exists c \in [a, b] ; f(c) = c$ ).

### III- Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$  par :

$$f(x) = x^2 - x \sin(x) - \cos(x)$$

1. Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
2. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  de l'intervalle  $I$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .
3. Auquel des intervalles  $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right[$  et  $\left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right[$  appartient le réel  $\alpha$  ? Justifier la réponse.
4. Donner le tableau de signe de la fonction  $f$  sur  $I$ .

### IV- Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 + x$

1. Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $g$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .
3. Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) (g(x))^3 + g(x) = x$
4. Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) g(x) \leq x$ , puis calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(g(x))^3}$ .

### V- Exercice 5

1. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt[3]{256} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[6]{64 \times 10^6}}$$

$$B = \frac{\sqrt[5]{3} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt{9})^3}{\sqrt[4]{27} \times \sqrt{\sqrt{3}}}$$

$$C = \frac{\sqrt[4]{2048} \times \sqrt[4]{160000}}{\sqrt[4]{4096} \times \sqrt[3]{\sqrt{256} \times \sqrt{512}}}$$