

Sommaire

## I- Coordonnées d'un point

1-1/ Base et repère de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

1-2/ Coordonnées d'un point par rapport un repère – Coordonnées d'un vecteur par rapport une base

1-3/ Coordonnées des vecteurs  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\alpha \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AB}$ 

## II- Deux vecteurs colinéaires - Trois vecteurs coplanaires

2-1/ Conditions de colinéarité de deux vecteurs

2-2/ Conditions de coplanarité de trois vecteurs

III- Représentation paramétrique d'une droite de l'espace ( $\mathcal{E}$ )IV- Positions relatives de deux droites dans l'espace ( $\mathcal{E}$ )V- Représentation paramétrique d'un plan – Équation cartésienne d'un plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

5-1/ Représentation paramétrique d'un plan

5-2/ Équation cartésienne d'un plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

5-3/ Positions relatives de deux plans

VI- Système de deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

6-1/ Système de deux équations cartésiennes d'une droite

6-2/ Positions relatives d'une droite et un plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

## VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

## 7-5/ Exercice 5

## 7-6/ Exercice 6

---

### I- Coordonnées d'un point

#### 1-1/ Base et repère de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

##### Vocabulaire

Le triplet  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  s'appelle base de l'espace .

On dit que l'espace ( $\mathcal{E}$ ) est muni (ou rapporté) de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Le quadruplet  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  s'appelle repère de l'espace.

On dit que l'espace ( $\mathcal{E}$ ) est muni (ou rapporté au) du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

#### 1-2/ Coordonnées d'un point par rapport un repère – Coordonnées d'un vecteur par rapport une base

##### Définition

Pour tout point  $M$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) muni du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , il existe un et un seul triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que :  $OM = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Le triplet  $(x, y, z)$  s'appelle les coordonnées du point  $M$  par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On note :  $M(x, y, z)$  ou  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

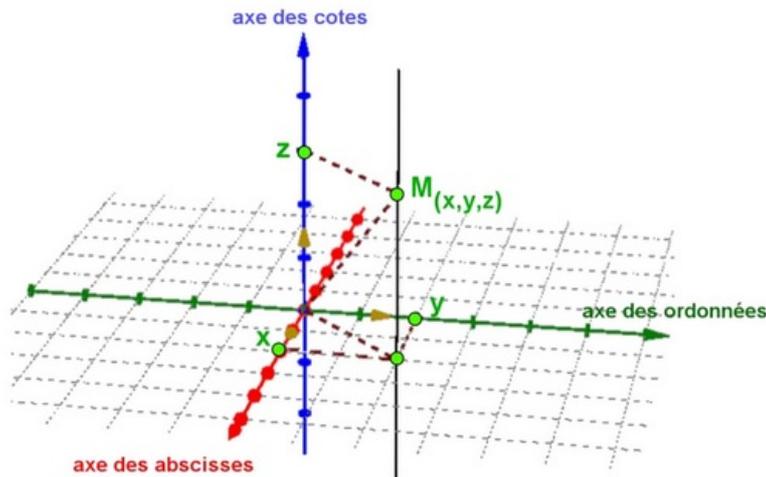
Le triplet  $(x, y, z)$  s'appelle aussi les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  (ou encore par rapport à la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ).

On note :  $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$  ou  $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Le nombre réel  $x$  s'appelle l'abscisse du point  $M$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Le nombre réel  $y$  s'appelle l'ordonné du point  $M$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Le nombre réel  $z$  s'appelle la cote du point  $M$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .



### 1-3/ Coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ , $\alpha \vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$

#### Propriété

Soient  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  deux vecteurs et  $A(a, b, c)$  et  $B(a', b', c')$  deux points de l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , et  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On a :

- 1)  $(\vec{u} + \vec{v})(x + x', y + y', z + z')$  et  $\alpha \vec{u}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
- 2)  $\overrightarrow{AB}(a' - a, b' - b, c' - c)$
- 3)  $I\left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}, \frac{c+c'}{2}\right)$

## II- Deux vecteurs colinéaires - Trois vecteurs coplanaires

### 2-1/ Conditions de colinéarité de deux vecteurs

#### Propriété (Rappel)

Soient  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  deux vecteurs de l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires équivaut à il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  de tel que  $\vec{v} = \alpha \vec{u}$  ou  $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ .

#### Déterminants extraites de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

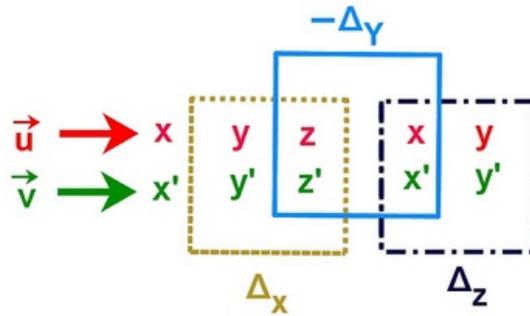
Soient  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  deux vecteurs de l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Les déterminants suivants :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

s'appellent les déterminants extraites de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires équivaut à  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$  (les déterminants extraites de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont tous nuls).



## 2-2/ Condition de coplanarité de trois vecteurs

### Déterminant de trois vecteurs de l'espace

Soient  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  et  $\vec{w}(x'', y'', z'')$  trois vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (xy'z'' - xz'y'') + (-yx'z'' + yz'x'') + (zx'y'' - zy'x'')$$

est appelé déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  dans cet ordre.

### Propriété

Soient  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  et  $\vec{w}(x'', y'', z'')$  trois vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ .

## III- Représentation paramétrique d'une droite de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

### Définition

Le système  $\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 + t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  s'appelle représentation paramétrique de la droite

$$D \left( A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

### Remarques

Pour chaque valeur du paramètre  $t$  on obtient un point et un seul, et la réciproque est vraie.

Par exemple : la valeur  $t = 0$  donne le point  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

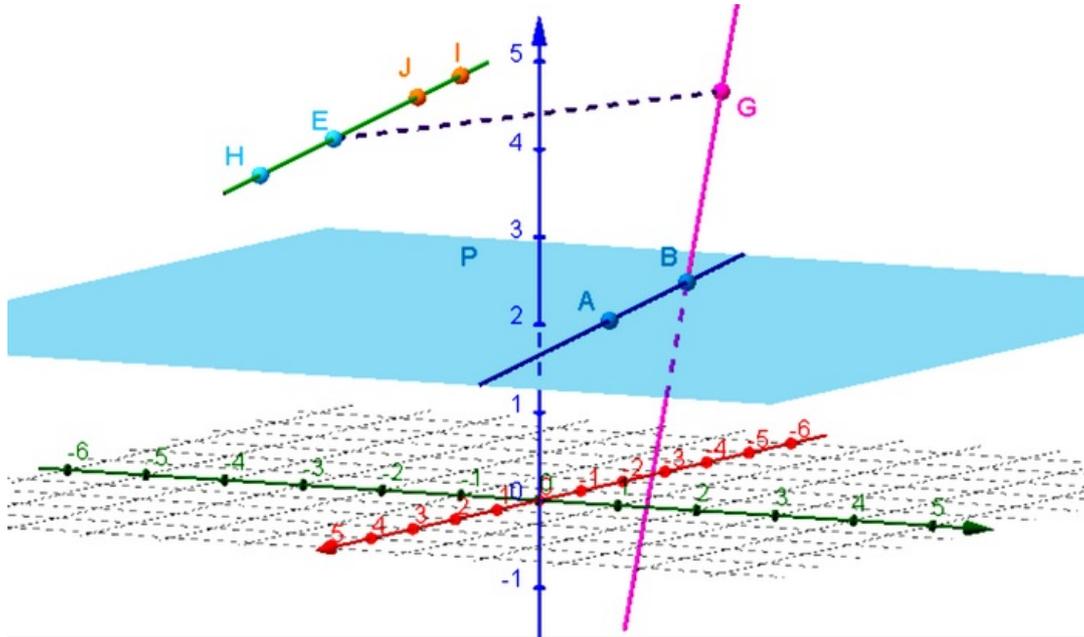
La représentation paramétrique de la droite  $D(A, \vec{u})$  n'est pas unique, on peut remplacer  $(x_0, y_0, z_0)$  par  $(x_1, y_1, z_1)$  coordonnées du point  $B$  à condition que  $B \in D(A, \vec{u})$ .

## IV- Positions relatives de deux droites dans l'espace ( $\mathcal{E}$ )

### Activité

On considère dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  les droites  $(AB)$  et  $(EH)$  et  $(IJ)$  et  $(BG)$ .

- Déduire les différentes positions relatives distinctes entre deux droites :



### Propriété

$D(A, \vec{u})$  et  $D'(B, \vec{v})$  sont deux droites de l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

- 1)  $(D) = (D') \Leftrightarrow (\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et les deux droites ont un point commun).
- 2)  $(D)$  et  $(D')$  sont strictement parallèles  $\Leftrightarrow (\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et les deux droites n'ont pas un point commun).
- 3)  $(D) \cap (D') = \{I\} \Leftrightarrow (\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires et le point I est commun aux deux droites).
- 4)  $(D)$  et  $(D')$  sont deux droites non coplanaires  $\Leftrightarrow (\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires et les deux droites n'ont pas des points communs)  $\Leftrightarrow (\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{AB}$  ne sont pas coplanaires)  $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) \neq 0$ .

## V- Représentation paramétrique d'un plan – Équation cartésienne d'un plan de l'espace $(\mathcal{E})$

### 5-1/ Représentation paramétrique d'un plan

#### Définition

Le système  $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$  ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$  s'appelle représentation paramétrique du plan

$P \left( A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right)$  de l'espace  $(\mathcal{E})$ .

#### Remarques

Pour chaque valeur du paramètre  $\alpha$  et du paramètre  $\beta$  on obtient un point et un seul, et la réciproque est vraie.

La représentation paramétrique du plan  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$  n'est pas unique, on peut remplacer  $(x_0, y_0, z_0)$  par  $(x_1, y_1, z_1)$  coordonnées du point  $B$  à condition que  $B \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$ .

## 5-2/ Équation cartésienne d'un plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

### Définition et propriété

Soit  $P\left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}\right)$  un plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Le plan ( $P$ ) est l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) qui vérifie l'équation :

$$(x - x_0)\Delta_x + (y - y_0)\Delta_y + (z - z_0)\Delta_z = 0$$

avec  $a = \Delta_x$  et  $b = \Delta_y$  et  $c = \Delta_z$  sont les déterminants extraites de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

L'équation  $(x - x_0)\Delta_x + (y - y_0)\Delta_y + (z - z_0)\Delta_z = 0$  s'appelle équation cartésienne du plan  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ .

En générale l'équation s'écrit  $P(A, \vec{u}, \vec{v}) : ax + by + cz + d = 0$ , avec  $a = \Delta_x$  et  $b = \Delta_y$  et  $c = \Delta_z$  et  $d = -x_0\Delta_x + y_0\Delta_y - z_0\Delta_z$  sont des réels et  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  (au moins un nombre est non nul).

### Application

On donne l'équation cartésienne du plan  $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in P(O, \vec{i}, \vec{j}) \\ \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \vec{OM}, \vec{i}, \vec{j} \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= 0 \end{aligned}$$

Méthode 2 :



3) Les 2 plans sont sécants suivant une droite :

$$(P) \cap (P') = (D) \Leftrightarrow \vec{u}(a, b, c) \text{ et } \vec{v}(a', b', c') \text{ ne sont pas colinéaires}$$

$(P) \cap (P') = (D) \Leftrightarrow$  au moins deux des rapports suivants  $\frac{a}{a'}$  et  $\frac{b}{b'}$  et  $\frac{c}{c'}$  ne soient pas égaux.

4)  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$  et  $P'(B, \vec{u}', \vec{v}')$  sont deux plans sécants  $\Leftrightarrow (\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{u}'$  sont coplanaires, et aussi les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$ )  $\Leftrightarrow \left( \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}') = 0 \text{ et } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}') = 0 \right)$ .

## VI- Système de deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

### 6-1/ Système de deux équations cartésiennes d'une droite

#### Propriété et définition

Dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ) rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la droite

$$D(A(x_0, y_0, z_0), \vec{u}(a, b, c)).$$

Un point  $M(x, y, z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) appartient à la droite  $D(A, \vec{u})$  si et seulement si on a :

- 1er cas : on suppose que les nombres  $a$  et  $b$  et  $c$  sont non nuls :

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite } D(A, \vec{u}).$$

- 2ème cas : on suppose qu'un nombre seul parmi les nombres  $a$  et  $b$  et  $c$  est nul ( on suppose que  $a = 0$ )

$$x - x_0 = 0 \text{ et } \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite } D(A, \vec{u}).$$

- 3ème cas : on suppose que juste deux nombres parmi les nombres  $a$  et  $b$  et  $c$  sont nuls ( on suppose que  $a = 0$  et  $c = 0$ )

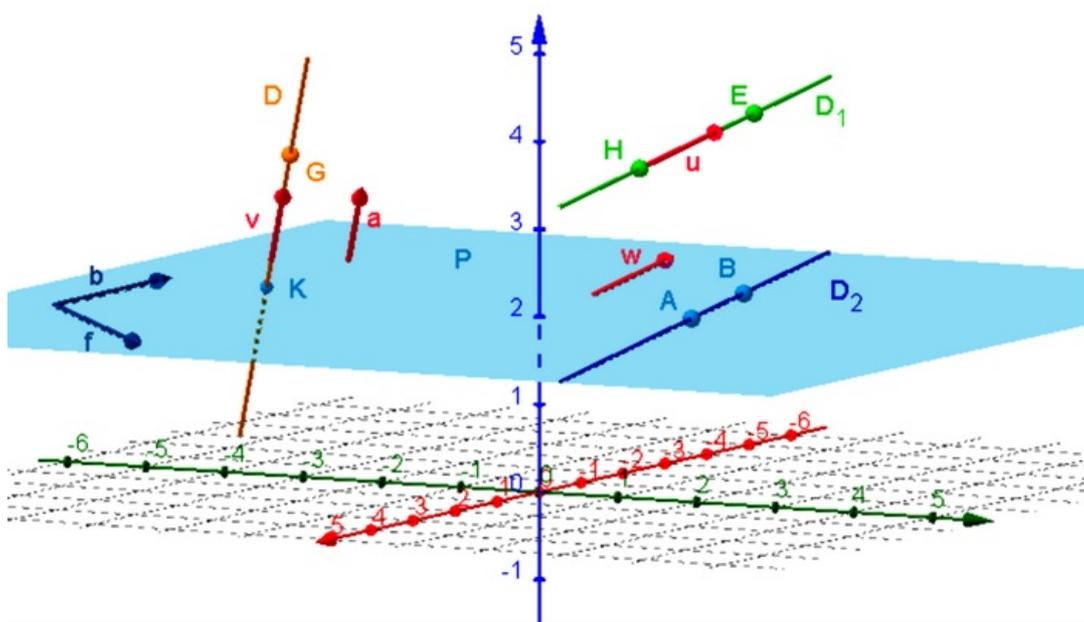
$$x - x_0 = 0 \text{ et } z - z_0 = 0 \text{ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite } D(A, \vec{u}).$$

### 6-2/ Positions relatives d'une droite et un plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

#### Activité

On considère dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ) rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une droite ( $D$ ) et un plan ( $P$ ).

- Déduire les différentes positions relatives distinctes entre le plan et la droite :



## Propriété

Soient  $D(B, \vec{w})$  une droite et  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$  un plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

- 1) La droite ( $D$ ) est incluse dans le plan ( $P$ )  $\Leftrightarrow$  (les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires et  $B \in (P)$ )  $\Leftrightarrow (\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \text{ et } B \in (P))$
- 2) Le droite ( $D$ ) est strictement parallèle u plan ( $P$ )  $\Leftrightarrow$  (les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires et  $B \notin (P)$ )  $\Leftrightarrow (\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \text{ et } B \notin (P))$ .
- 3) La droite ( $D$ ) coupe le plan ( $P$ ) au point  $A \Leftrightarrow$  (les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas coplanaires)  $\Leftrightarrow (\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0)$ .

## VII- Exercices

### 7-1/ Exercice 1

On considère les vecteurs  $\vec{u}(2; 1; 4)$ ,  $\vec{v}(1; -1; 1)$  et  $\vec{w}(1; 2; 3)$ .

1. Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.

On considère les vecteurs  $\vec{u}(1 + m; 1; 2m - 1)$ ,  $\vec{v}(1; -1; 1)$  et  $\vec{w}(1; 2; 3)$ .

2. Déterminer  $m$  pour que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  soient coplanaires.

### 7-2/ Exercice 2

On considère les points  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(-1; 3; 1)$ ,  $C(5; 0; -5)$  et  $E(1; 3; 0)$ .

Soit  $M(x; y; z)$  un point de l'espace.

1. Montrer que si  $M \in (AB)$ , alors  $(\exists t \in \mathbb{R})$  tel que le système ( $S$ ) : 
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ est}$$
 une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$ .

2. Montrer que  $C \in (AB)$ .

3. Le point  $E$  appartient-il à la droite  $(AB)$  ?

### 7-3/ Exercice 3

1. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite  $(D)$  passant par le point  $A\left(-1; -2; \frac{1}{3}\right)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}\left(-2; \frac{1}{2}; 1\right)$ .

Soit  $(\Delta)$  une droite définie par ses deux équations cartésiennes suivantes :

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

2. Déterminer un vecteur directeur de la droite  $(\Delta)$  et un point de  $(\Delta)$ .
3. Dédurre une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$ .

### 7-4/ Exercice 4

On considère les points  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-1; 3; 1)$  et  $C(3; 3; -1)$ .

1. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

Soit  $M(x; y; z)$  un point de l'espace.

2. Montrer que  $M \in (ABC) \Leftrightarrow (\exists (t; t') \in \mathbb{R}^2) : \begin{cases} x = 1 - 2t + 2t' \\ y = 2 + t + t' \\ z = 3 - 2t + 4t' \end{cases}$  le système est une représentation paramétrique du plan  $(ABC)$ .
3. En déduire que  $M(x; y; z) \in (ABC) \Leftrightarrow x + 6y - 2z - 7 = 0$ .

### 7-5/ Exercice 5

1. Étudier les positions relatives de la droite  $(D)$  et la droite  $(\Delta)$  dans les cas suivants :

$$\begin{array}{l} 1 \quad (D) : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\Delta) : \begin{cases} x = -1 - t' \\ y = 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ 2 \quad (D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\Delta) : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 3 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ 3 \quad (D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\Delta) : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 \\ z = 3 - 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \end{array}$$

### 7-6/ Exercice 6

1. Étudier la position relative de la droite  $(D)$  et le plan  $(P)$  dans les cas suivants :

$$\begin{array}{l} 1 \quad (D) : \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (P) : 3x + 2y + z + 1 = 0 \\ 2 \quad (D) : \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (P) : x + 3y + z + 4 = 0 \end{array}$$