

### I- Exercice 1 (7 pts)

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} ; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} ; x < 1 \end{cases}$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .
3. a- Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de 1, puis interpréter le résultat
3. b- Étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche de 1, puis interpréter le résultat
3. c- En déduire la dérivabilité de  $f$  en 1.
4. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0, puis donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
5. a- Calculer la fonction dérivée de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .
5. b- Calculer la fonction dérivée de  $f$  sur  $] -\infty; 1[$ .

### II- Exercice 2 (3 pts)

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 3x - 1 ; g(x) = \frac{x^2-1}{x-2} ; h(x) = (-x-2)\sqrt{9+x}$$

1. Déterminer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Déterminer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ .
3. Déterminer  $h'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

### III- Exercice 3 (10 pts)

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x-2}$ .

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x)$ .
4. En déduire les asymptotes de  $(C_f)$ .

5. Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  sur  $D_f$ .
6. Montrer que  $\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$ .
7. Étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
8. Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point  $(1; f(1))$ .
9. Montrer que le point  $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(C_f)$ .
10. Montrer avec deux méthodes que la droite d'équation  $(D) : y = x + \frac{1}{2}$  est une asymptote à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .
11. Construire la courbe  $(C_f)$  et  $(D)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Soit  $m \in \mathbb{R}$

12. Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation  $m = \frac{2x^2}{2x-1}$ .