

I- Exercice 1 (7 pts)

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} ; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} ; x < 1 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
3. a- Étudier la dérivabilité de f à droite de 1, puis interpréter le résultat
3. b- Étudier la dérivabilité de f à gauche de 1, puis interpréter le résultat
3. c- En déduire la dérivabilité de f en 1.
4. Étudier la dérivabilité de f en 0, puis donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
5. a- Calculer la fonction dérivée de f sur $[1; +\infty[$.
5. b- Calculer la fonction dérivée de f sur $] -\infty; 1[$.

II- Exercice 2 (3 pts)

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 3x - 1 ; g(x) = \frac{x^2-1}{x-2} ; h(x) = (-x-2)\sqrt{9+x}$$

1. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.
3. Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III- Exercice 3 (10 pts)

On considère la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x-2}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x)$.
4. En déduire les asymptotes de (C_f) .

5. Étudier la dérivabilité de la fonction f sur D_f .
6. Montrer que $\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$.
7. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f .
8. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $(1; f(1))$.
9. Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) .
10. Montrer avec deux méthodes que la droite d'équation $(D) : y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
11. Construire la courbe (C_f) et (D) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit $m \in \mathbb{R}$

12. Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $m = \frac{2x^2}{2x-1}$.