AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 11-3 : Espaces vectoriels - Problème de synthèse

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble suivant :

$$\mathscr{E} = \left\{ f : x \mapsto (ax+b)e^{2x} / \, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. Montrer que $(\mathscr{E}\,;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Soit f_1 et f_2 les deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$.

2. Montrer que la famille $B = (f_1; f_2)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.
3. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right)e^{2t}\,\mathrm{d}\,t$ appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$ en déterminant ses coordonnées dans la base B.

5-2/ Partie 2

On définit sur l'ensemble $H = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ une loi de composition interne « $+$ » comme suit :

Pour tous $(x;y)$ et $(x';y')$ de H : $(x;y) + (x';y') = (x+x';y+y')$

et une loi de composition externe à coefficients réels « $\bullet$ » comme suit :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall\,(x;y) \in H)\ \alpha \bullet (x;y) = (x^\alpha; \alpha y)$$

On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}^2$ dans H par $\varphi((x;y)) = (e^x; y)$ (En considérant $\left(\mathbb{R}^2;+;\bullet\right)$ l'espace vectoriel usuel.

1. Montrer que φ est un morphisme de $\left(\mathbb{R}^2;+\right)$ dans $(H;+)$.
2. En déduire que $(H;+)$ est un groupe commutatif.
3. Déterminer l'élément neutre dans $(H;+)$.
4. Quelle est le symétrique de $(x;y)$ dans $(H;+)$.
5. Montrer que $(H;+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

5-3/ Partie 3

On considère dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble défini par :

$$E = \left\{ M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) / M = xI + yA \ ; \ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. Montrer que $(E; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel
2. Montrer que $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ A \neq \alpha I$, puis en déduire que la famille $(I; A)$ est une base de l'espace vectoriel E.
3. Vérifier que $A^2 = A + 2I$ puis en déduire que A admet un inverse A^{-1} appartenant à E.
4. Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$.
5. Montrer que $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif.
6. Montrer que l'équation $(X \in E)\ ;\ X^2 = X$ admet quatre solutions : La matrice nulle, la matrice identité et deux matrices que nous les noterons P et Q.
7. Calculer le produit $P \times Q$. Les matrices P et Q admettent-elles un inverse dans $(E; \times)$? Justifier
8. Déterminer les coordonnées de P et Q dans la base $(I; A)$.
9. En déduire que la famille $(P; Q)$ est une base de l'espace vectoriel E.