

Sommaire

V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1

5-2/ Partie 2

5-3/ Partie 3

V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1

Soit \mathcal{E} l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E} = \{f : x \mapsto (ax + b)e^{2x} / (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrer que $(\mathcal{E}; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Soit f_1 et f_2 les deux fonctions numériques définies sur \mathbb{R} par $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$.

2. Montrer que la famille $B = (f_1; f_2)$ est une base de l'espace vectoriel \mathcal{E} .
3. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^x (t + \frac{1}{2})e^{2t} dt$ appartient à l'ensemble \mathcal{E} en déterminant ses coordonnées dans la base B .

5-2/ Partie 2

On définit sur l'ensemble $H = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ une loi de composition interne « + » comme suit :

$$\text{Pour tous } (x; y) \text{ et } (x'; y') \text{ de } H : (x; y) + (x'; y') = (x + x'; y + y')$$

et une loi de composition externe à coefficients réels « • » comme suit :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall (x; y) \in H) \alpha \bullet (x; y) = (\alpha x; \alpha y)$$

On considère l'application φ définie de \mathbb{R}^2 dans H par $\varphi((x; y)) = (e^x; y)$ (En considérant $(\mathbb{R}^2; +; \bullet)$ l'espace vectoriel usuel.

1. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{R}^2; +)$ dans $(H; +)$.
2. En déduire que $(H; +)$ est un groupe commutatif.
3. Déterminer l'élément neutre dans $(H; +)$.
4. Quelle est le symétrique de $(x; y)$ dans $(H; +)$.
5. Montrer que $(H; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel.

5-3/ Partie 3

On considère dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble défini par :

$$E = \{M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) / M = xI + yA ; (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrer que $(E; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel
2. Montrer que $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) A \neq \alpha I$, puis en déduire que la famille $(I; A)$ est une base de l'espace vectoriel E .
3. Vérifier que $A^2 = A + 2I$ puis en déduire que A admet un inverse A^{-1} appartenant à E .
4. Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$.
5. Montrer que $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif.
6. Montrer que l'équation $(X \in E) ; X^2 = X$ admet quatre solutions : La matrice nulle, la matrice identité et deux matrices que nous les noterons P et Q .
7. Calculer le produit $P \times Q$. Les matrices P et Q admettent-elles un inverse dans $(E; \times)$? Justifier
8. Déterminer les coordonnées de P et Q dans la base $(I; A)$.
9. En déduire que la famille $(P; Q)$ est une base de l'espace vectoriel E .