AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 2 Devoir 3 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

Un sac contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$), dont n sont blanches et n sont noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boule et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points.
- Si les deux boules tirées sont noires, on perd 20 points.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul.

1. Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

On répète 5 fois le jeu précédent.

2. Calculer la probabilité de gagner 100 points.
3. Calculer la probabilité de gagner 40 points.

Au cours d'un seul jeu,on considère la variable aléatoire X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd, 0 si le gain est nul et $+20$ si on gagne.

4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
5. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

II- Exercice 2

Partie A

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux, alors : $a^{2016} \equiv 1\ [13]$

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ x^{2015} \equiv 2\ [13]$, et soit x une solution de l'équation (E).

2. Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
3. Montrer que $(E)\ :\ x \equiv 7\ [13]$.

Partie B

On considère une urne U contenant cinquante boules numérotées de 1 à 50. (Les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard une boule de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro solution de l'équation

(E) ?

On tire au hasard une boule de l’urne, on note son numéro puis on la remet dans l'urne. On répète cette expérience trois fois de suite.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois portant un numéro solution de l'équation (E) ?

III- Exercice 3

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(a;b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix}$$

On considère l’ensemble : $\mathscr{F} = \left\{M(a;b)/\,(a;b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

On note $O = M(0;0)$ et $I = M(1;0)$ et $J = M(0;1)$.

1. Montrer que $(\mathscr{F};+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que $(I;J)$ est une base de l’espace vectoriel $(\mathscr{F};+;\bullet)$ et donner sa dimension.

Soit α un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la famille $(1;\alpha)$ est une base de l’espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;\bullet)$.

On considère l'application ψ de $\mathbb{C}$ dans $\mathscr{F}$ définie par $\psi(z) = M(a;b)$ avec $z = a+b\alpha$ et $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

4. Vérifier que $J^2 = -2(I+J)$ et $\psi(\alpha) = J$.
5. Déterminer les deux valeurs de α pour lesquelles l’application ψ est un isomorphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(\mathscr{F};\times)$.

On prend dans cette question : $\alpha = -1+i$

6. Écrire dans la base $(I;J)$ la matrice J^{2007}.