AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 2 Devoir 2 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

On rappelle que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif, que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre.

On pose :

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ;\ J=\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}\ ;\ M(x;y)=\begin{pmatrix}x&-3y\\y&x\end{pmatrix}\ \left((x;y)\in\mathbb{R}^2\right)$$

$$E=\left\{M(x;y)/\,(x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;.)$, de dimension 2
2. Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.
3. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$, et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ \varphi(x+iy)=M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

4. Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ sur $(E^*,\times)$.
5. En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.
6. Montrer que $J^{2017}=\varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}i\right)$, puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans $(E^*,\times)$.
7. Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

II- Exercice 2

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(D)\ :\ 7x^3-13y=5$

Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D)

1. Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
2. En déduire que $x^{12}\equiv 1\ [13]$.
3. Montrer que $x^3\equiv 10\ [13]$.
4. En déduire que $x^{12}\equiv 3\ [13]$.
5. Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

III- Exercice 3

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left(\forall\left(x;y\right)\in\mathbb{R}^2\right)\ f\left(x\right)+f\left(y\right)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

1. Montrer que $(E,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\mathscr{A}\subset E$ et que $(\mathscr{A},+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Partie B

Pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\left(\forall\left(\alpha;\beta\right)\in\mathbb{R}^2\right)\ f_{(\alpha;\beta)}\left(x\right)=\alpha e^x\cos\left(ax\right)+\beta e^x\sin\left(bx\right)$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E_{(a;b)}=\left\{\ f_{(\alpha;\beta)}/\left(\alpha;\beta\right)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1. Montrer que $\left(E_{(a;b)},+,\bullet\right)$ est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer selon les valeurs des réels a et b, la dimension de l'espace vectoriel $E_{(a;b)}$.

Partie C

Dans cette partie, $\left(\mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*\right),+,\bullet\right)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $(a;b)\in\mathbb{R}^2$, et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f_{(a;b)}\left(x\right)=x^a e^{bx}\ \ et\ \ \varphi_{(a;b)}\left(x\right)=\ln\left(f_{(a;b)}\left(x\right)\right)$$

On considère l'ensemble : $\mathscr{L}=\left\{\varphi_{(a;b)}/\left(a;b\right)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1. Montrer que $(\mathscr{L};+)$ est un sous-groupe du groupe $\left(\mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*\right),+\right)$
2. Vérifier que pour tout $\varphi_{(a;b)}\in\mathscr{L}$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$: $\lambda\bullet\varphi_{(a;b)}\in\mathscr{L}$
3. En déduire que $(\mathscr{L},+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.
4. Montrer que $\left(\varphi_{(1;0)};\varphi_{(0;1)}\right)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$, puis déterminer sa dimension.