

Sommaire**I- Concavité d'une courbe - Points d'inflexions**

1-1/ Concavité d'une courbe

1-2/ Point d'inflexion

1-3/ Concavité et dérivée seconde

II- Les asymptotes

2-1/ Asymptotes verticales

2-2/ Asymptotes horizontales

2-3/ Asymptote oblique

III- Branches paraboliques

3-1/ Branche parabolique de direction l'axe des abscisses

3-2/ Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

3-3/ Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ ($a \neq 0$)

3-4/ Résumé des branches parabolique et des asymptotes d'une courbe

IV- Axe de symétrie - Centre de symétrie**V- Exercices**

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

5-5/ Exercice 5

5-6/ Exercice 6

I- Concavité d'une courbe - Points d'inflexions

1-1/ Concavité d'une courbe

Définitions

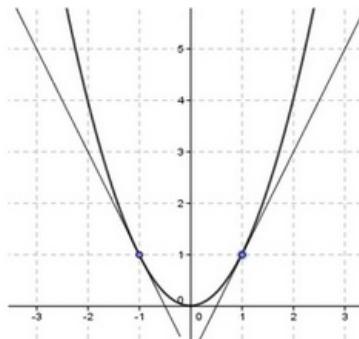
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative.

On dit que la courbe (C_f) est Convexe si (C_f) est entièrement située au dessus de chacun de ces tangentes.

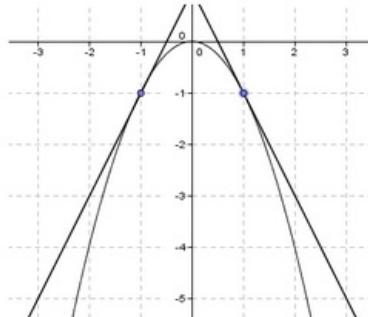
On dit que la courbe (C_f) est Concave si (C_f) est entièrement située au dessous de chacun de ces tangentes.

Exemples

La courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, car sa courbe est entièrement située au dessus de chacun de ses tangentes :



La courbe de la fonction $x \mapsto -x^2$ est concave, car sa courbe est entièrement située au dessous de chacun de ses tangentes :



1-2/ Point d'inflexion

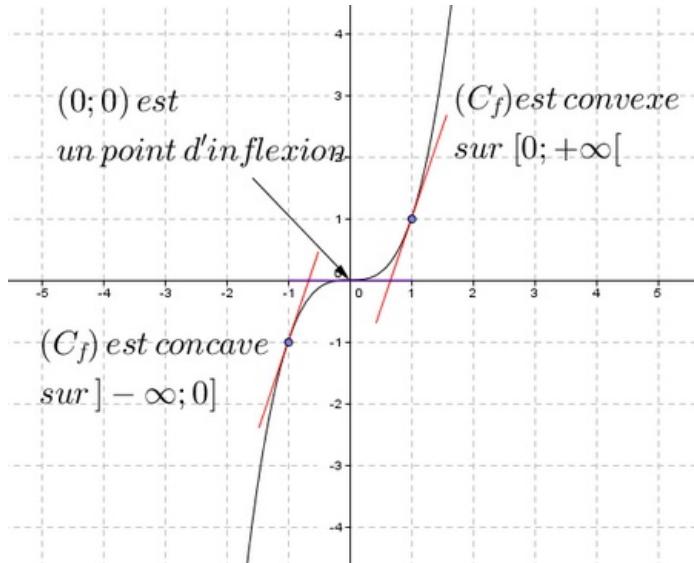
Définition

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I , et $a \in I$, et (C_f) la courbe représentative de f .

On dit que $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion si la courbe (C_f) change sa convexité au point A .

Exemple

La courbe de la fonction $x \mapsto x^3$ change sa convexité au point $(0; 0)$, donc $(0; 0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) :



1-3/ Concavité et dérivée seconde

Propriété

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , et (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$.

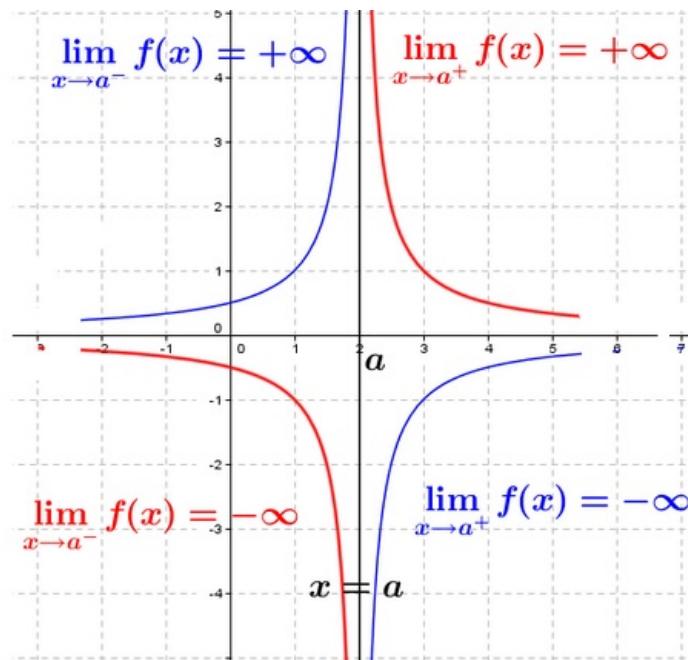
- Si f'' est positive sur I , alors (C_f) est convexe sur I .
- Si f'' est négative sur I , alors (C_f) est concave sur I .
- Si f'' s'annule en a en changement de signe, alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .

II- Les asymptotes

2-1/ Asymptotes verticales

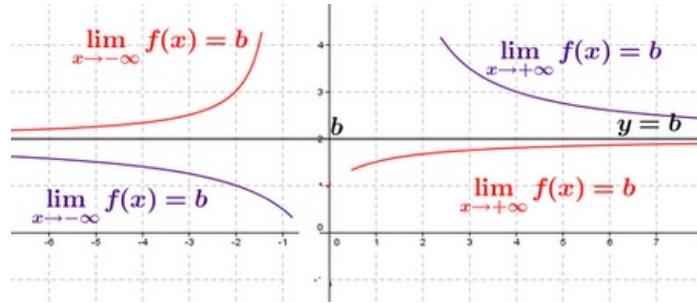
Définition

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) :



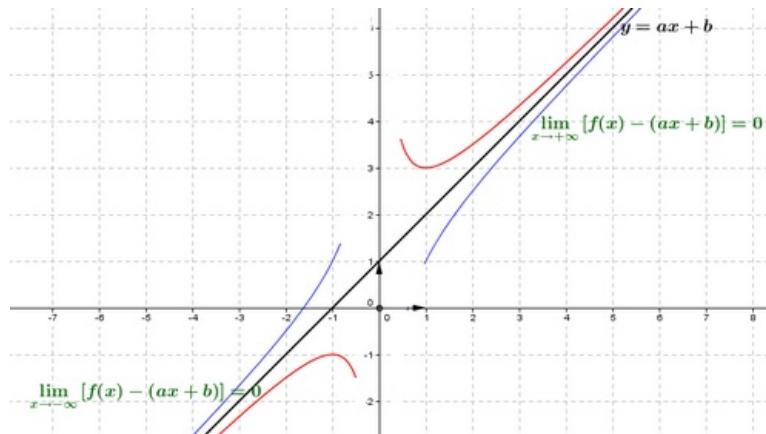
2-2/ Asymptotes horizontales

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, alors on dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$:



2-3/ Asymptote oblique

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$) où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) :



Propriété

La droite d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si et seulement s'il existe une fonction h telle que $f(x) = ax + b + h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$).

La droite d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$.

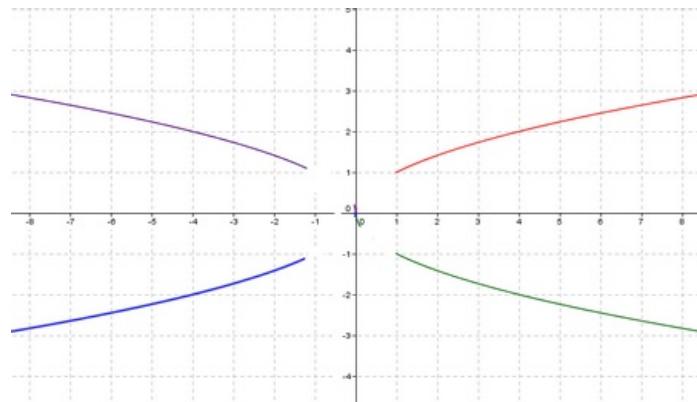
On a la même propriété au voisinage de $-\infty$.

III- Branches paraboliques

3-1/ Branche parabolique de direction l'axe des abscisses

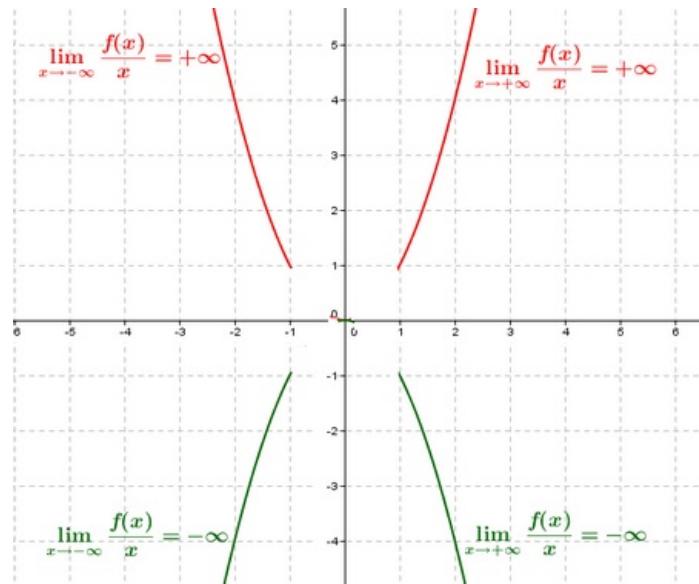
Définition

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$), alors on dit que la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ (ou au voisinage de $-\infty$) :



3-2/ Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

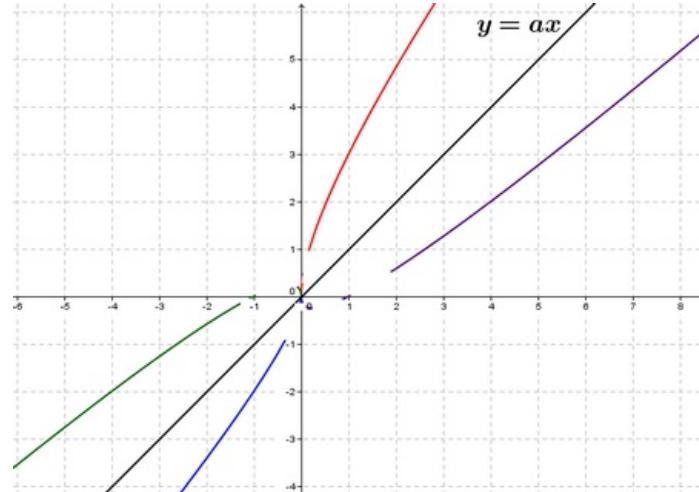
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, alors on dit que la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



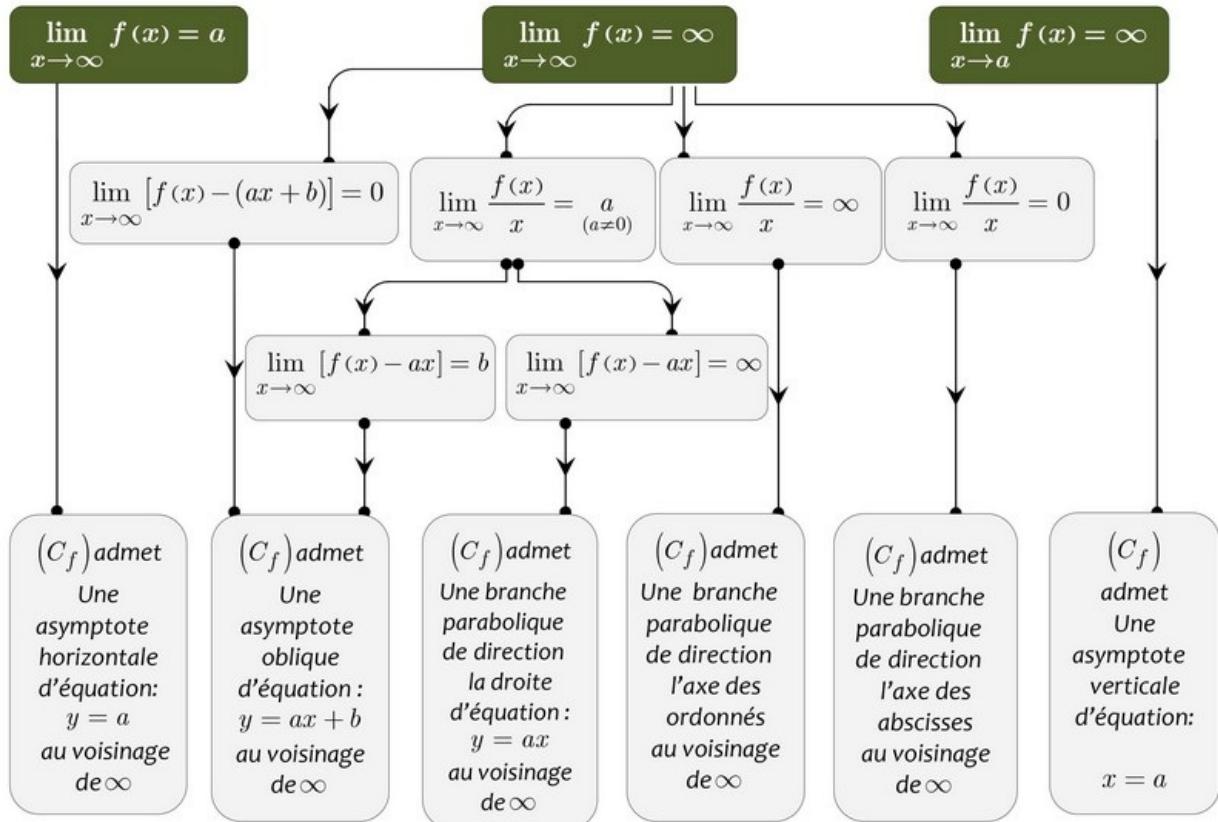
3-3/ Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ ($a \neq 0$)

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ où ($a \neq 0$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, alors on dit que la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$.

On a la même définition au voisinage de $-\infty$.



3-4/ Résumé des branches parabolique et des asymptotes d'une courbe



IV- Axe de symétrie - Centre de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (C_f) sa courbe représentative.

La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) : 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) : 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Remarques

Soit f une fonction qui admet la droite $x = a$ comme axe de symétrie :

- si f est croissante sur $]-\infty; a] \cap D_f$, alors f est décroissante sur $[a; +\infty[\cap D_f$
- si f est décroissante sur $]-\infty; a] \cap D_f$, alors f est croissante sur $[a; +\infty[\cap D_f$

Soit f une fonction qui admet le point $\Omega(a; b)$ comme centre de symétrie :

- si f est croissante sur $]-\infty; a] \cap D_f$, alors f est croissante sur $[a; +\infty[\cap D_f$

- si f est décroissante sur $]-\infty; a]$ $\cap D_f$, alors f est décroissante sur $[a; +\infty[\cap D_f$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

f est la fonction définie par $f(x) = x^4 - 2x^2$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Étudier le comportement de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
4. Donner le tableau de variation de la fonction f .
5. Déterminer les extréums de f .
6. Déterminer les points d'inflexions de la courbe représentant la fonction f .
7. Tracer la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormé.

5-2/ Exercice 2

f est la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+x+3}{2x^2+2x-4}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition, et donner l'interprétation graphique des résultats obtenus.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f .
4. Tracer la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormé.
5. Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentant la fonction f .

5-3/ Exercice 3

f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. a- Étudier la dérivabilité de f en 2 et -2 .
3. b- Donner une interprétation géométrique des résultats de la question précédente.
4. Calculer la dérivée de la fonction f et étudier son signe.
5. Donner le tableau de variation de la fonction f .
6. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) représentant la fonction f et tracer cette courbe.

5-4/ Exercice 4

On considère la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on déduire ?
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter le résultat obtenu.
3. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$
4. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
5. Étudier la concavité de la courbe (C_f) , et montrer que (C_f) admet un unique point d'inflexion I auquel on déterminera les coordonnées.
6. Résoudre dans \mathbb{R}^+ l'équation $f(x) = x$ et interpréter le résultat graphiquement.
7. Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5-5/ Exercice 5

Partie 1

On considère la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 + \sqrt{x} - 2$.

1. Étudier la dérivabilité de g à droite en 0.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
3. a- Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
3. b- En déduire que g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. c- Dresser le tableau de variations de g .
4. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4\sqrt{x} + 4}{x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
2. a-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. b-Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, et interpréter le résultat graphiquement.

3. a- Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$.
3. b- Dresser le tableau de variation de la fonction f .
4. Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 4.
5. Tracer (C_f).

5-6/ Exercice 6

Partie 1

On considère la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = 6(1 - 2\sqrt{x})$
2. Dresser le tableau de variations de g .
3. En déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$: $g(x) \leq 0$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (4x - 1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1. Étudier la dérивabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2. a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. b- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, et interpréter le résultat graphiquement.
3. a- Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$.
3. b- Dresser le tableau de variation de la fonction f .
4. Calculer $f(1)$ et tracer la courbe (C_f) .