



Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 10 (Représentation graphique d'une fonction)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

### Sommaire

#### I- Concavité d'une courbe - Points d'inflexions

1-1/ Concavité d'une courbe

1-2/ Point d'inflexion

1-3/ Concavité et dérivée seconde

#### II- Les asymptotes

2-1/ Asymptotes verticales

2-2/ Asymptotes horizontales

2-3/ Asymptote oblique

#### III- Branches paraboliques

3-1/ Branche parabolique de direction l'axe des abscisses

3-2/ Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

3-3/ Branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = ax$  ( $a \neq 0$ )

3-4/ Résumé des branches parabolique et des asymptotes d'une courbe

#### IV- Axe de symétrie - Centre de symétrie

#### V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

5-5/ Exercice 5

5-6/ Exercice 6

---

#### I- Concavité d'une courbe - Points d'inflexions

## 1-1/ Concavité d'une courbe

### Définitions

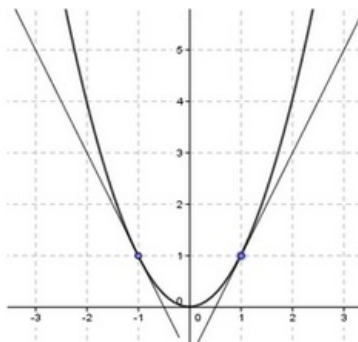
Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

On dit que la courbe  $(C_f)$  est Convexe si  $(C_f)$  est entièrement située au dessus de chacun de ces tangentes.

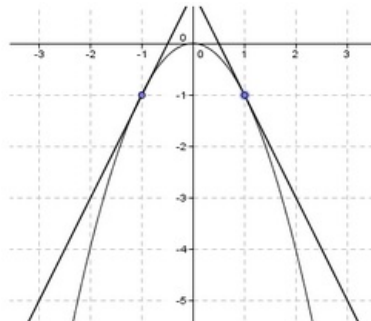
On dit que la courbe  $(C_f)$  est Concave si  $(C_f)$  est entièrement située au dessous de chacun de ces tangentes.

### Exemples

La courbe de la fonction  $x \mapsto x^2$  est convexe, car sa courbe est entièrement située au dessus de chacun de ses tangentes :



La courbe de la fonction  $x \mapsto -x^2$  est concave, car sa courbe est entièrement située au dessous de chacun de ses tangentes :



## 1-2/ Point d'inflexion

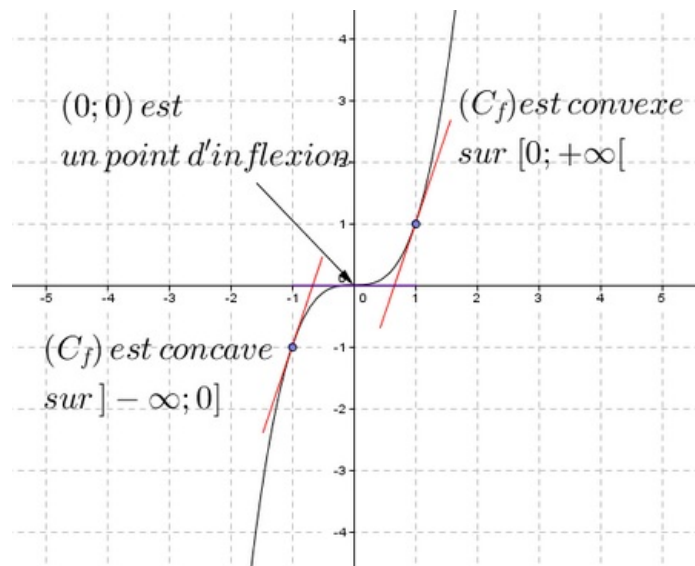
### Définition

Soient  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , et  $a \in I$ , et  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$ .

On dit que  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion si la courbe  $(C_f)$  change sa convexité au point  $A$ .

### Exemple

La courbe de la fonction  $x \mapsto x^3$  change sa convexité au point  $(0; 0)$ , donc  $(0; 0)$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C_f)$  :



## 1-3/ Concavité et dérivée seconde

### Propriété

Soient  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ , et  $(C_f)$  sa courbe représentative et  $a \in I$ .

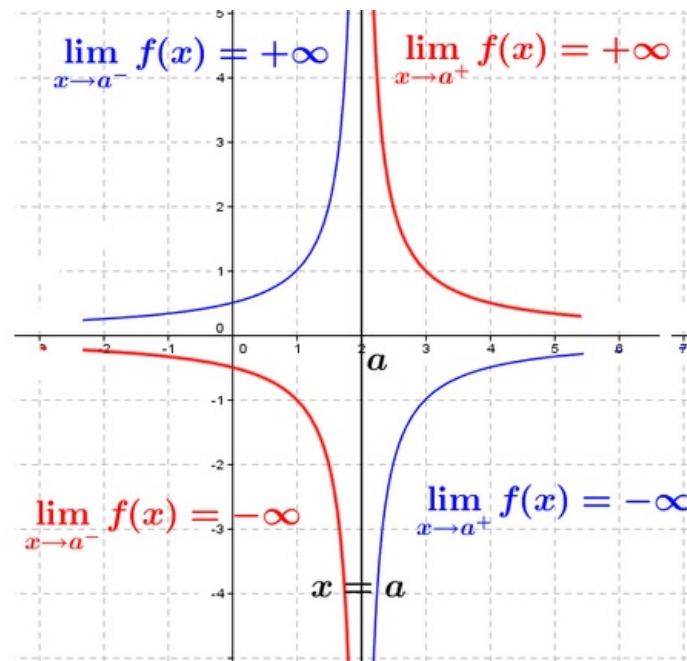
- Si  $f''$  est positive sur  $I$ , alors  $(C_f)$  est convexe sur  $I$ .
- Si  $f''$  est négative sur  $I$ , alors  $(C_f)$  est concave sur  $I$ .
- Si  $f''$  s'annule en  $a$  en changement de signe, alors le point  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C_f)$ .

## II- Les asymptotes

### 2-1/ Asymptotes verticales

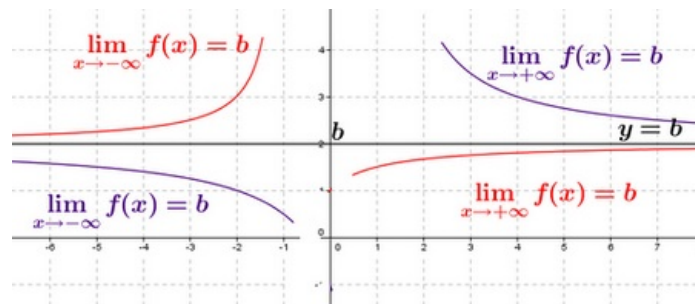
#### Définition

Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ , alors on dit que la droite d'équation  $x = a$  est une asymptote verticale à la courbe  $(C_f)$  :



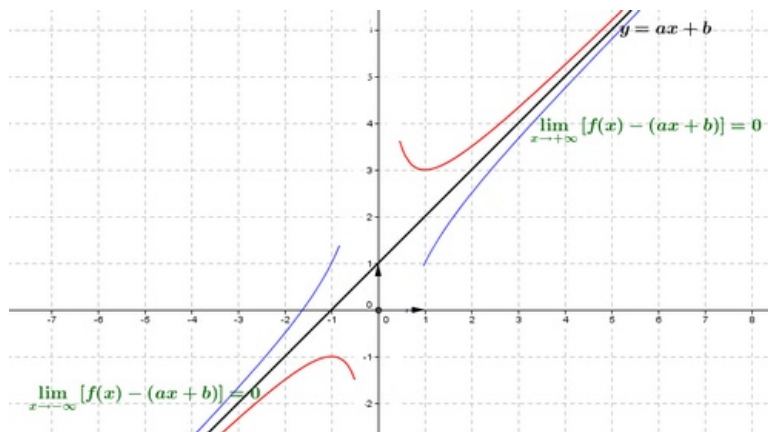
## 2-2/ Asymptotes horizontales

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , alors on dit que la droite d'équation  $y = b$  est une asymptote horizontale à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  ou au voisinage de  $-\infty$  :



## 2-3/ Asymptote oblique

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ) où  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ , alors on dit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) :



La droite d'équation  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) est une asymptote oblique à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  (respectivement au voisinage de  $-\infty$ ) si et seulement s'il existe une fonction  $h$  telle que  $f(x) = ax + b + h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ ).

La droite d'équation  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) est une asymptote oblique à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ .

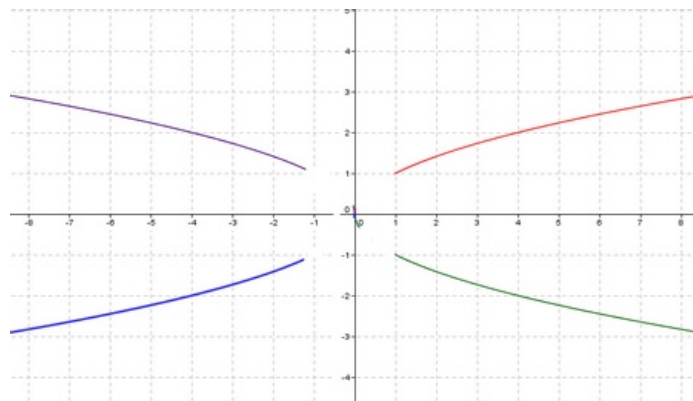
On a la même propriété au voisinage de  $-\infty$ .

### III- Branches paraboliques

#### 3-1/ Branche parabolique de direction l'axe des abscisses

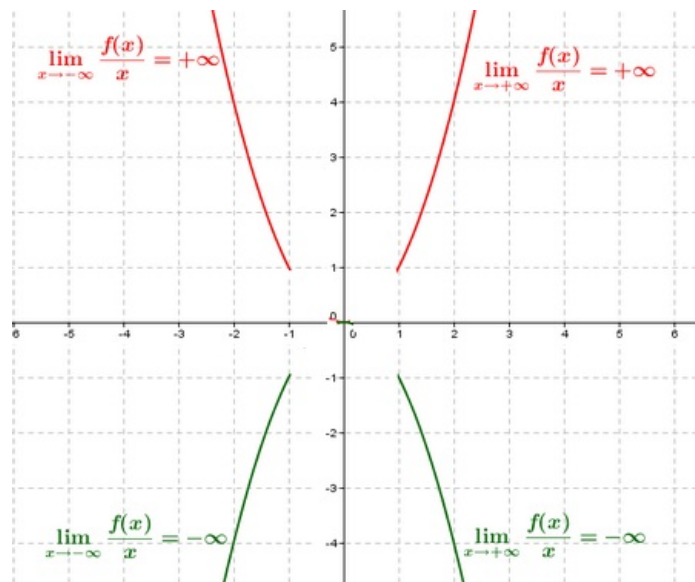
##### Définition

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  (ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ), alors on dit que la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$  (ou au voisinage de  $-\infty$ ) :



#### 3-2/ Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

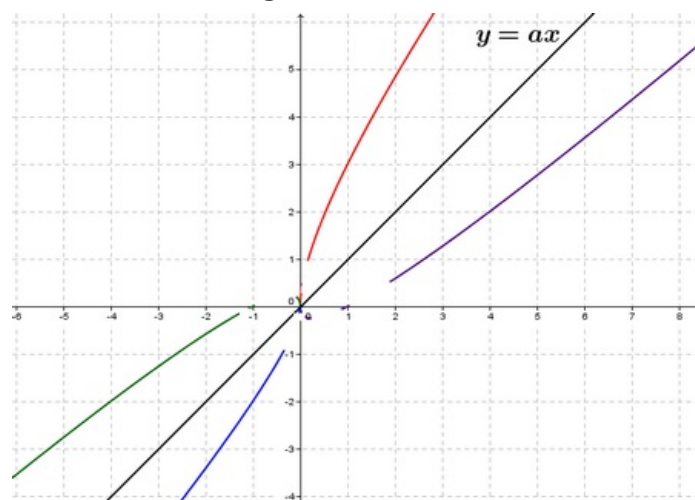
Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ , alors on dit que la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



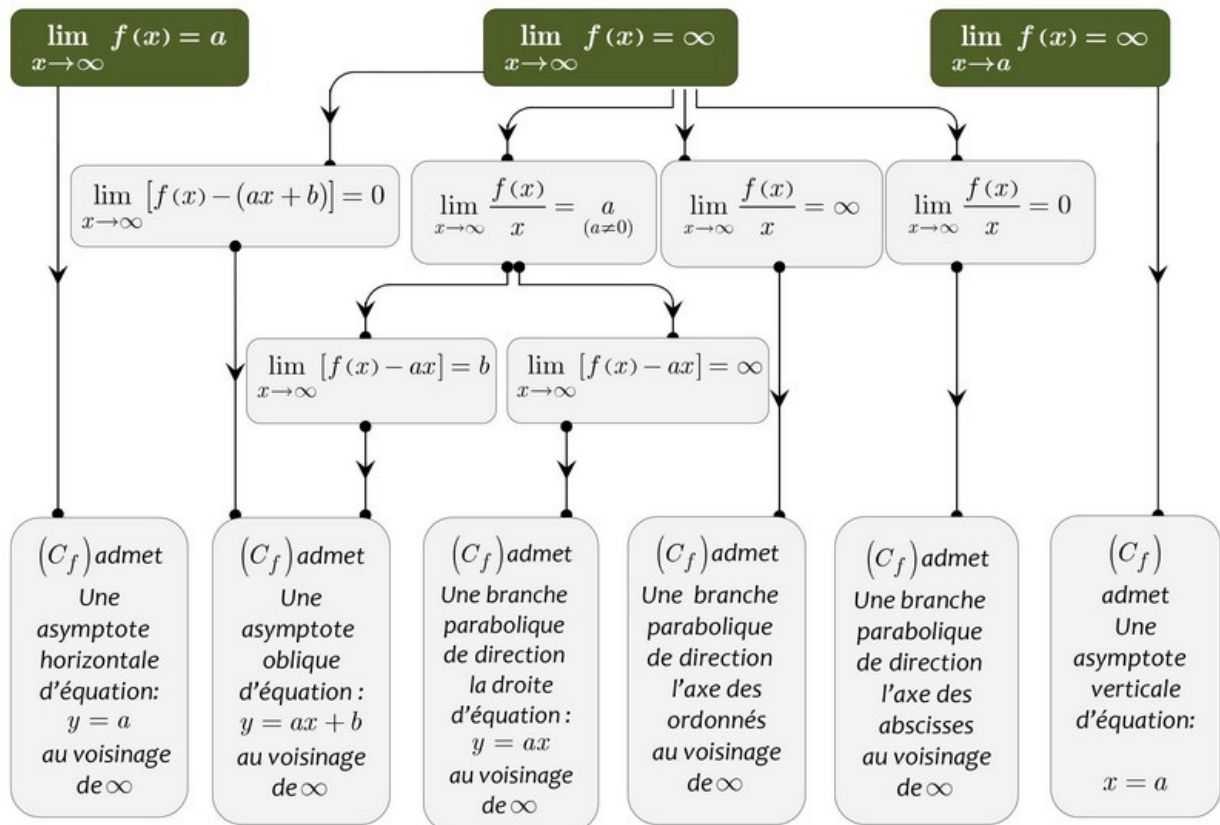
### 3-3/ Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ ( $a \neq 0$ )

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  où ( $a \neq 0$ ) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ , alors on dit que la courbe ( $C_f$ ) de la fonction  $f$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = ax$  au voisinage de  $+\infty$ .

On a la même définition au voisinage de  $-\infty$ .



### 3-4/ Résumé des branches parabolique et des asymptotes d'une courbe



## IV- Axe de symétrie - Centre de symétrie

### Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D_f$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

La droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de la courbe  $(C_f)$  si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) : 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Le point  $\Omega(a; b)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(C_f)$  si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) : 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

### Remarques

Soit  $f$  une fonction qui admet la droite  $x = a$  comme axe de symétrie :

- si  $f$  est croissante sur  $] -\infty; a] \cap D_f$ , alors  $f$  est décroissante sur  $[a; +\infty[ \cap D_f$
- si  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; a] \cap D_f$ , alors  $f$  est croissante sur  $[a; +\infty[ \cap D_f$

Soit  $f$  une fonction qui admet le point  $\Omega(a; b)$  comme centre de symétrie :

- si  $f$  est croissante sur  $] -\infty; a] \cap D_f$ , alors  $f$  est croissante sur  $[a; +\infty[ \cap D_f$

- si  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; a] \cap D_f$ , alors  $f$  est décroissante sur  $[a; +\infty[ \cap D_f$

## V- Exercices

### 5-1/ Exercice 1

$f$  est la fonction définie par  $f(x) = x^4 - 2x^2$ .

1. Donner le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
3. Étudier le comportement de la fonction  $f$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .
4. Donner le tableau de variation de la fonction  $f$ .
5. Déterminer les extrémums de  $f$ .
6. Déterminer les points d'inflexions de la courbe représentant la fonction  $f$ .
7. Tracer la courbe représentant la fonction  $f$  dans un repère orthonormé.

### 5-2/ Exercice 2

$f$  est la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2+x+3}{2x^2+2x-4}$ .

1. Donner le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Calculer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son domaine de définition, et donner l'interprétation graphique des résultats obtenus.
3. Donner le tableau de variation de la fonction  $f$ .
4. Tracer la courbe représentant la fonction  $f$  dans un repère orthonormé.
5. Montrer que la droite d'équation  $x = -\frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe représentant la fonction  $f$ .

### 5-3/ Exercice 3

$f$  est la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$ .

1. Donner le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
3. a- Étudier la dérivabilité de  $f$  en 2 et  $-2$ .
3. b- Donner une interprétation géométrique des résultats de la question précédente.
4. Calculer la dérivée de la fonction  $f$  et étudier son signe.
5. Donner le tableau de variation de la fonction  $f$ .
6. Étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$  représentant la fonction  $f$  et tracer cette courbe.

### 5-4/ Exercice 4



On considère la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$ .

Et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Que peut-on déduire ?
2. Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 puis interpréter le résultat obtenu.
3. Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[ : f'(x) = 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$
4. Étudier le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
5. Étudier la concavité de la courbe  $(C_f)$ , et montrer que  $(C_f)$  admet un unique point d'inflexion  $I$  auquel on déterminera les coordonnées.
6. Résoudre dans  $\mathbb{R}^+$  l'équation  $f(x) = x$  et interpréter le résultat graphiquement.
7. Tracer la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## 5-5/ Exercice 5

### Partie 1

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x^3 + \sqrt{x} - 2$ .

1. Étudier la dérivabilité de  $g$  à droite en 0.
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
3. a- Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .
3. b- En déduire que  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
3. c- Dresser le tableau de variations de  $g$ .
4. Calculer  $g(1)$  et en déduire le signe de  $g(x)$  pour tout  $x \in [0; +\infty[$ .

### Partie 2

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 4\sqrt{x} + 4}{x}$

Et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
2. a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2. b- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ , et interpréter le résultat graphiquement.

3. a- Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[ : f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$ .
3. b- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
4. Écrire une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse 4.
5. Tracer  $(C_f)$ .

## 5-6/ Exercice 6

### Partie 1

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[ : g'(x) = 6(1 - 2\sqrt{x})$
2. Dresser le tableau de variations de  $g$ .
3. En déduire que pour tout  $x \in [0; +\infty[ : g(x) \leq 0$ .

### Partie 2

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = (4x - 1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$ .

Et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2. a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2. b- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ , et interpréter le résultat graphiquement.
3. a- Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[ : f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$ .
3. b- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
4. Calculer  $f(1)$  et tracer la courbe  $(C_f)$ .