Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 10 (Représentation graphique d'une fonction)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Concavité d'une courbe - Points d'inflexions

1-1/ Concavité d'une courbe

Définitions

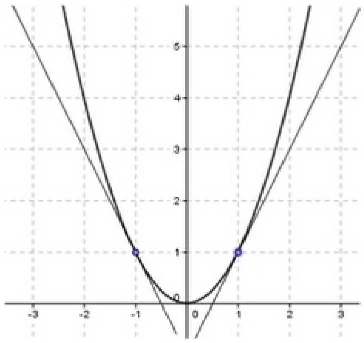
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative.

On dit que la courbe $\left(C_f\right)$ est Convexe si $\left(C_f\right)$ est entièrement située au dessus de chacun de ces tangentes.

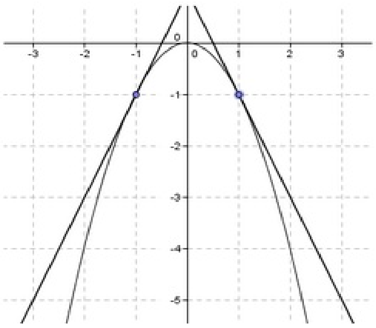
On dit que la courbe $\left(C_f\right)$ est Concave si $\left(C_f\right)$ est entièrement située au dessous de chacun de ces tangentes.

Exemples

La courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, car sa courbe est entièrement située au dessus de chacun de ses tangentes :



La courbe de la fonction $x \mapsto -x^2$ est concave, car sa courbe est entièrement située au dessous de chacun de ses tangentes :



1-2/ Point d'inflexion

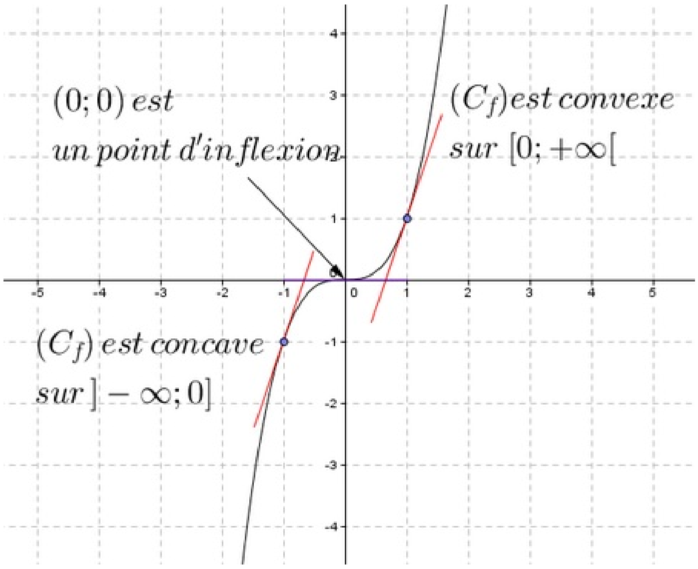
Définition

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$, et $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de f.

On dit que $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion si la courbe $\left(C_f\right)$ change sa convexité au point A.

Exemple

La courbe de la fonction $x \mapsto x^3$ change sa convexité au point $(0;0)$, donc $(0;0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\left(C_f\right)$:



1-3/ Concavité et dérivée seconde

Propriété

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$.

- Si f'' est positive sur I, alors (C_f) est convexe sur I.

- Si f'' est négative sur I, alors (C_f) est concave sur I.

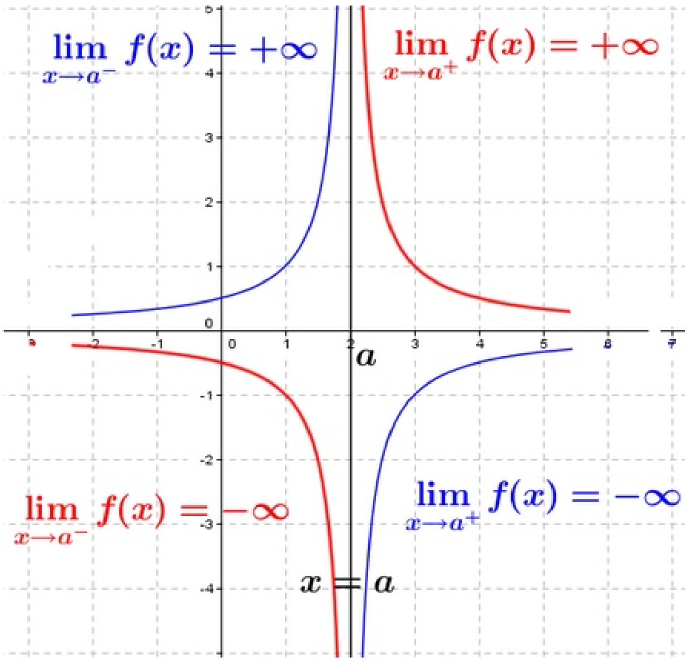
- Si f'' s'annule en a en changement de signe, alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

II- Les asymptotes

2-1/ Asymptotes verticales

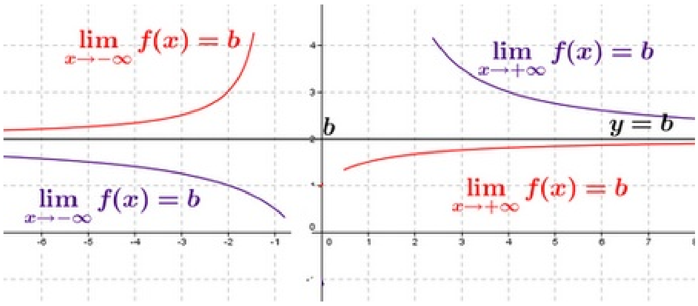
Définition

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) :



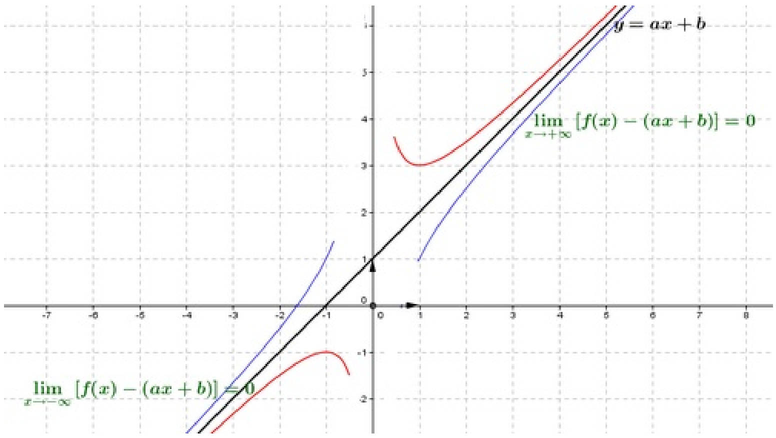
2-2/ Asymptotes horizontales

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, alors on dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$:



2-3/ Asymptote oblique

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$) où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) :



Propriété

La droite d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si et seulement s'il existe une fonction h telle que $f(x) = ax + b + h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$).

La droite d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b$.

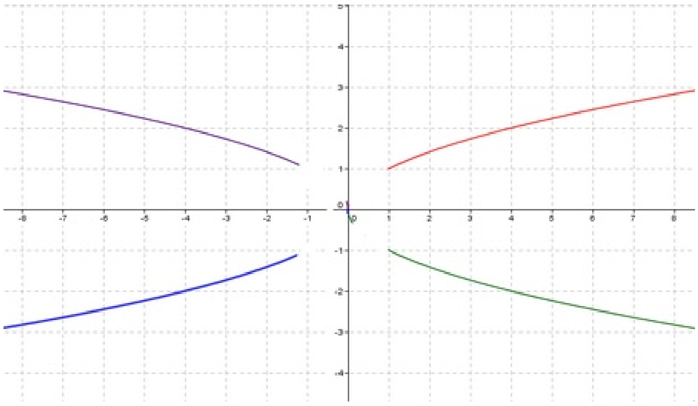
On a la même propriété au voisinage de $-\infty$.

III- Branches paraboliques

3-1/ Branche parabolique de direction l'axe des abscisses

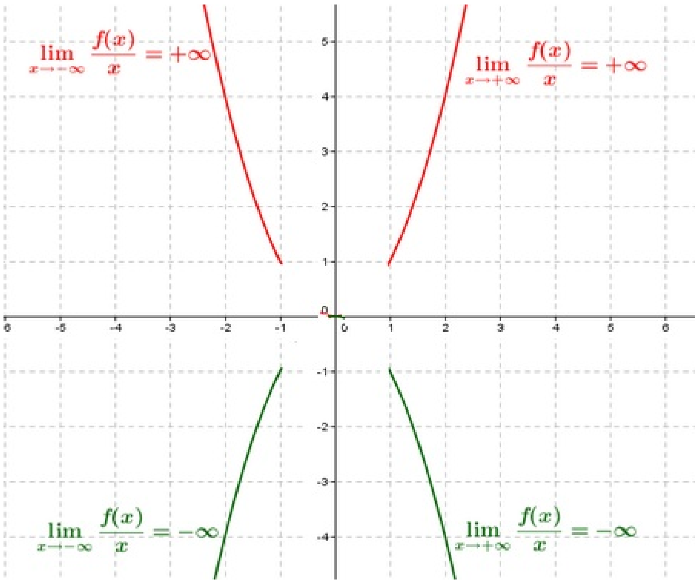
Définition

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$), alors on dit que la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ (ou au voisinage de $-\infty$) :



3-2/ Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

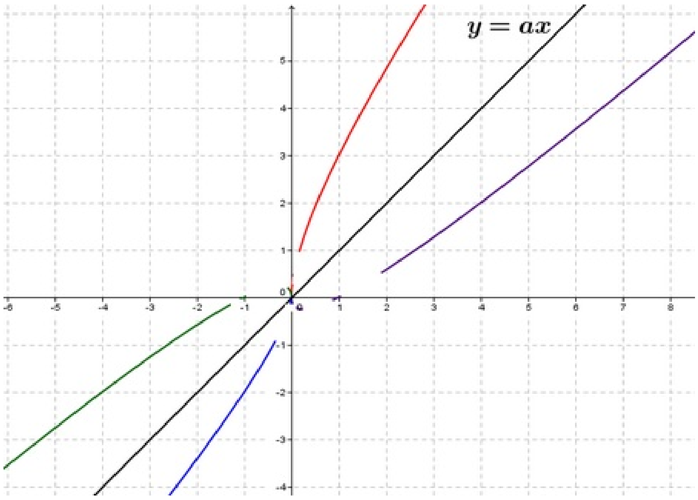
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, alors on dit que la courbe $\left(C_f\right)$ de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



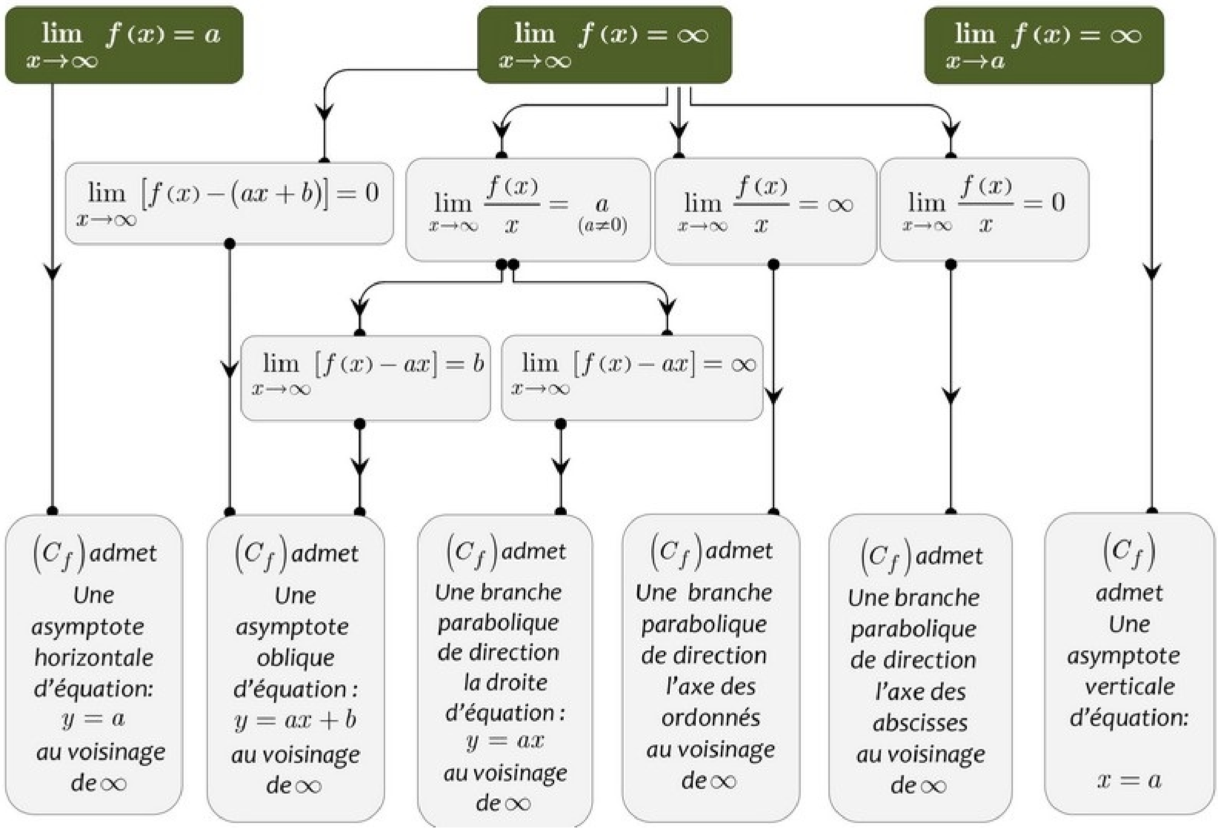
3-3/ Branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ $(a\neq 0)$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ où $(a\neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\pm\infty$, alors on dit que la courbe $\left(C_f\right)$ de la fonction f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$.

On a la même définition au voisinage de $-\infty$.



3-4/ Résumé des branches parabolique et des asymptotes d'une courbe



IV- Axe de symétrie - Centre de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (C_f) sa courbe représentative.

La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) \ : \ 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) \ : \ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) \ : \ 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) \ : \ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Remarques

Soit f une fonction qui admet la droite $x = a$ comme axe de symétrie :

- si f est croissante sur $\left]-\infty; a\right] \cap D_f$, alors f est décroissante sur $\left[a; +\infty\right[\cap D_f$
- si f est décroissante sur $\left]-\infty; a\right] \cap D_f$, alors f est croissante sur $\left[a; +\infty\right[\cap D_f$

Soit f une fonction qui admet le point $\Omega\left(a; b\right)$ comme centre de symétrie :

- si f est croissante sur $\left]-\infty; a\right] \cap D_f$, alors f est croissante sur $\left[a; +\infty\right[\cap D_f$
- si f est décroissante sur $\left]-\infty; a\right] \cap D_f$, alors f est décroissante sur $\left[a; +\infty\right[\cap D_f$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

f est la fonction définie par $f\left(x\right) = x^4 - 2x^2$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right)$.
3. Étudier le comportement de la fonction f au voisinage de de $+\infty$ et $-\infty$.
4. Donner le tableau de variation de la fonction f.
5. Déterminer les extrémums de f.
6. Déterminer les points d'inflexions de la courbe représentant la fonction f.
7. Tracer la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormé.

5-2/ Exercice 2

f est la fonction définie par $f\left(x\right) = \frac{x^2+x+3}{2x^2+2x-4}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition, et donner l'interprétation graphique des résultats obtenus.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f.
4. Tracer la courbe représentant la fonction f dans un repère orthonormé.
5. Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentant la fonction f.

5-3/ Exercice 3

f est la fonction définie par $f\left(x\right) = \sqrt{x^2 - 4} - x$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right)$.
3. a- Étudier la dérivabilité de f en 2 et -2.
3. b- Donner une interprétation géométrique des résultats de la question précédente.
4. Calculer la dérivée de la fonction f et étudier son signe.
5. Donner le tableau de variation de la fonction f.
6. Étudier les branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$ représentant la fonction f et tracer cette

courbe.

5-4/ Exercice 4

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$.

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on déduire ?
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter le résultat obtenu.
3. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = 2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$
4. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Étudier la concavité de la courbe $\left(C_f\right)$, et montrer que $\left(C_f\right)$ admet un unique point d'inflexion I auquel on déterminera les coordonnées.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = x$ et interpréter le résultat graphiquement.
7. Tracer la courbe $\left(C_f\right)$ dans le repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

5-5/ Exercice 5

Partie 1

On considère la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 + \sqrt{x} - 2$.

1. Étudier la dérivabilité de g à droite en 0.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
3. a- Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
3. b- En déduire que g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. c- Dresser le tableau de variations de g.
4. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3-4\sqrt{x}+4}{x}$

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
2. a-Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. b-Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, et interpréter le résultat graphiquement.
3. a- Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$.
3. b- Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 4.
5. Tracer $\left(C_f\right)$.

5-6/ Exercice 6

Partie 1

On considère la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par $g\left(x\right) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g'\left(x\right) = 6\left(1 - 2\sqrt{x}\right)$
2. Dresser le tableau de variations de g.
3. En déduire que pour tout $x \in [0;+\infty[$: $g\left(x\right) \leq 0$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par $f\left(x\right) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$.
Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2. a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$.
2. b- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, et interpréter le résultat graphiquement.
3. a- Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'\left(x\right) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$.
3. b- Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Calculer $f\left(1\right)$ et tracer la courbe $\left(C_f\right)$.