AlloSchool

Mathématiques : Tronc Commun

Séance 13 (Le produit scalaire)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Produit scalaire de deux vecteurs

1-1/ Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan (P).

A et B deux points de (P) tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

La distance entre A et B est notée par AB ou encore $||\overrightarrow{AB}||$. On lit la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$.

Donc $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

1-2/ Produit scalaire de deux vecteurs

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$.

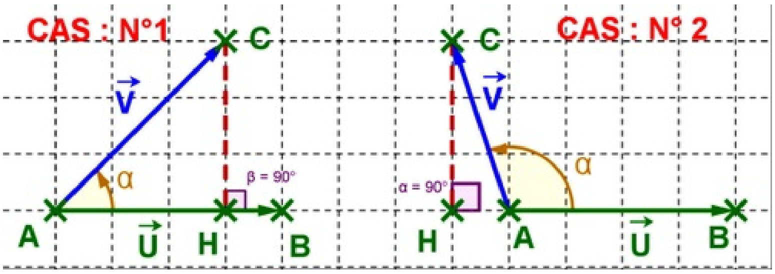
le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ tel que :

Si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$

Si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A\neq B$ car $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$), alors

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens (Cas n°1).

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens opposés (Cas n°2).



Remarques

La projection orthogonale de B sur la droite (AB) est B, d'où

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB\times AB=AB^2>0$, on note $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$ o par $\overrightarrow{u}^2$, et on lit le carré scalaire.

$\overrightarrow{u}^2$ est un nombre positif de même que $\overrightarrow{AB}^2$ est un nombre positif.

On a $\overrightarrow{AB}^2=AB^2=||\overrightarrow{AB}||^2$, d'où $||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$, et de même on a $||\overrightarrow{u}||=\sqrt{\overrightarrow{u}^2}$

II- Forme trigonométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls

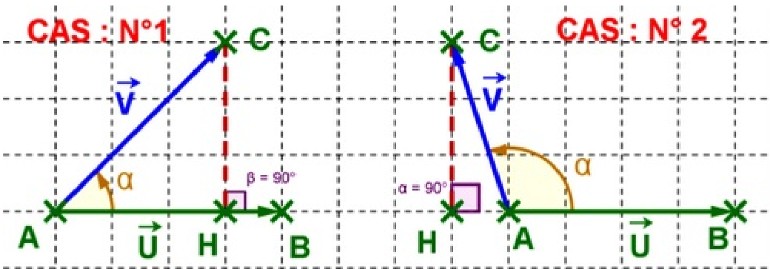
Activité

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$.

H est la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A\neq B$ car $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$),

On considère l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ de mesure $\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}\equiv\alpha\ [2\pi]$

1. Pour chaque cas exprimer AH en fonction de AC et $\cos\alpha$.



Propriété

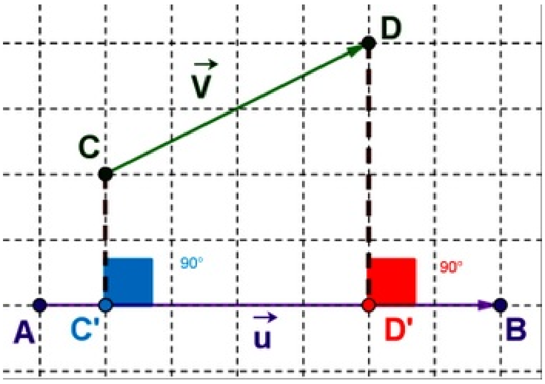
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ et

$\overline{\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)}=\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}\equiv\alpha\ [2\pi]$

La forme trigonométrique du produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\alpha$, ou encore $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos\alpha$

Remarque

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ est le nombre réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ tel que C' et D' sont respectivement les projections orthogonales de C et D sur la droite (AB) :



III- Orthogonalité de deux vecteurs

Activité

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

1. Donner la forme trigonométrique de $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.
2. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonales.

Propriété

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

On note $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

IV- Propriétés du produit scalaire

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan (P)

On a :

1. Linéarité du produit scalaire :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{w}.\left(\overrightarrow{u} + v\right) = \overrightarrow{w}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}.\overrightarrow{v} \\ \left(\alpha\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\left(\alpha\overrightarrow{v}\right) = \alpha \times \left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right) \end{cases}$$

2. Positivité du produit scalaire :

$$\overrightarrow{u}^2 \geq 0$$

3. produit scalaire est non dégénéré :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Conséquences

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan (P)

On a :

$$1\ \left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)^2=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2=||\overrightarrow{u}||^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+||\overrightarrow{v}||^2$$
$$2\ \left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)^2=\overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2=||\overrightarrow{u}||^2-2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+||\overrightarrow{v}||^2$$
$$3\ \left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right).\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2=||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2$$
$$4\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left[||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2\right]$$

V- Applications du produit scalaire

5-1/ Relations métriques dans un triangle rectangle

Activité

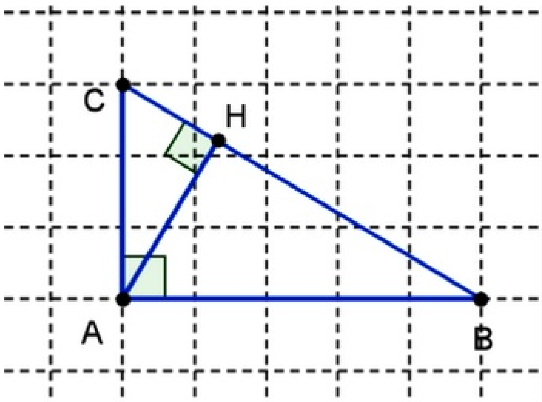
ABC est un triangle rectangle en A.

Le point H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC).

1. Calculer $\cos B$ en utilisant les deux triangles ABC et ABH.
2. Montrer que $BA^2 = BH \times BC$.
3. Montrer que $AH^2 = AB^2 - HB^2$, et que $AH^2 = AC^2 - HC^2$.
4. En déduire que $2AH^2 = BC^2 - \left(HB^2 + HC^2\right)$.

On remarque que $(HB + HC)^2 - 2HB \times HC = BC^2 - 2HB \times HC$.

5. En déduire que $AH^2 = HB \times HC$.



Propriété

ABC est un triangle rectangle en A.

Le point H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC).

On a :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$
$$BA^2 = BH \times BC$$
$$CA^2 = CH \times CB$$
$$AH^2 = HB \times HC$$

On les appelle les relations métriques dans un triangle rectangle.

5-2/ Théorème d'El Kashi

Théorème

Dans tout triangle ABC, on pose $AB = c$ et $AC = b$ et $BC = a$.

On a :

1- $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$ ou encore $a^2 = c^2 + b^2 - 2c \times b \times \cos A$

2- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos B$ ou encore $b^2 = c^2 + a^2 - 2c \times a \times \cos B$

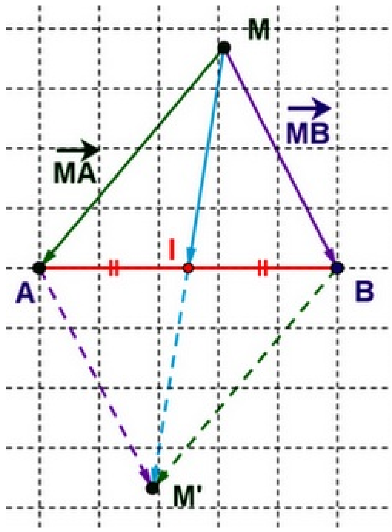
3- $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB \times \cos C$ ou encore $c^2 = b^2 + a^2 - 2b \times a \times \cos C$

5-3/ Théorème de la médiane

Soit un segment $[AB]$ du plan (P), le point I est son milieu.

Pour tout point M du plan (P), on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Calculer $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}$ dans les deux cas suivants :

$$1 \quad ||\overrightarrow{u}|| = 1\ ;\ ||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{3}\ ;\ \overline{\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\right)} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

$$2 \quad ||\overrightarrow{u}|| = 2\ ;\ ||\overrightarrow{v}|| = \frac{2}{\sqrt{2}}\ ;\ \overline{\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\right)} \equiv \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$$

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 4$.

2. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

3. Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $\overline{\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\right)}$ sachant que $||\overrightarrow{u}|| = 4$, $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{2}$ et $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = -2\sqrt{6}$.

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 3\sqrt{3}$.

4. Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

6. En déduire $\widehat{CAB}$.

6-2/ Exercice 2

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan tels que $||\overrightarrow{u}|| = 4$ et $||\overrightarrow{v}|| = 5$.

1. Déterminer le réel m sachant que $\left(m\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right).\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = 13.\cos\left(\widehat{A}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Soit ABC un triangle tel que $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $\cos\left(\widehat{A}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Considérons D un point du plan défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.

3. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

6-3/ Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ et $AD = 4$ et $CD = 6$.

Soit O le milieu du segment $[AB]$.

1. Calculer les distances BD et AC.
2. Montrer que pour tout point M du plan, on a $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 18$.
3. En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 24$.

Soient ABC un triangle rectangle en A, et H le projeté orthogonal de A sur (BC) et $AB = 3$ et $AC = 4$.

4. Calculer les longueurs BC, HC, HB et AH.

6-4/ Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$ et $AC = 1$ et $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\frac{1}{3}$.

1. Vérifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1$.
2. Calculer la distance BC.

Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

3. Calculer AI et BJ.

Soit E un point du plan tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.