

Sommaire

I- Produit scalaire de deux vecteurs

1-1/ Norme d'un vecteur

1-2/ Produit scalaire de deux vecteurs

II- Forme trigonométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls

III- Orthogonalité de deux vecteurs

IV- Propriétés du produit scalaire

V- Applications du produit scalaire

5-1/ Relations métriques dans un triangle rectangle

5-2/ Théorème d'El Kashi

5-3/ Théorème de la médiane

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

---

I- Produit scalaire de deux vecteurs

1-1/ Norme d'un vecteur

**Définition**

Soit  $\vec{u}$  un vecteur du plan  $(P)$ .

$A$  et  $B$  deux points de  $(P)$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

La distance entre  $A$  et  $B$  est notée par  $AB$  ou encore  $|\overrightarrow{AB}|$ . On lit la norme du vecteur  $\vec{u}$  ou  $\overrightarrow{AB}$ .

Donc  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ .

## 1-2/ Produit scalaire de deux vecteurs

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

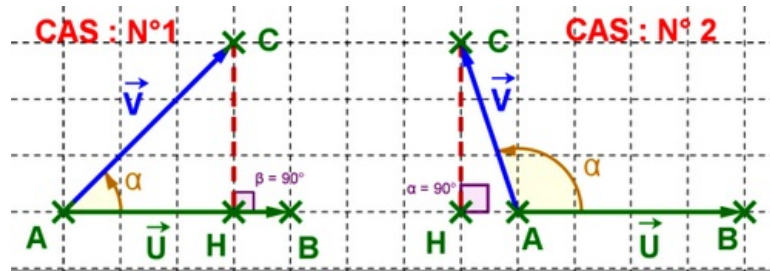
le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $H$  la projection orthogonale de  $C$  sur la droite  $(AB)$  ( $A \neq B$  car  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ), alors

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont même sens (Cas n°1).

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont des sens opposés (Cas n°2).



### Remarques

La projection orthogonale de  $B$  sur la droite  $(AB)$  est  $B$ , d'où

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2 > 0$ , on note  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  ou par  $\vec{u}^2$ , et on lit le carré scalaire.

$\vec{u}^2$  est un nombre positif de même que  $\overrightarrow{AB}^2$  est un nombre positif.

On a  $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ , d'où  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ , et de même on a  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

## II- Forme trigonométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls

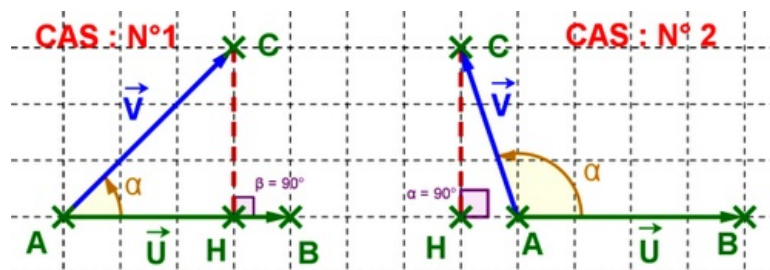
### Activité

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

$H$  est la projection orthogonale de  $C$  sur la droite  $(AB)$  ( $A \neq B$  car  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ),

On considère l'angle  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$  de mesure  $\overline{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \alpha [2\pi]$

1. Pour chaque cas exprimer  $AH$  en fonction de  $AC$  et  $\cos \alpha$ .



### Propriété

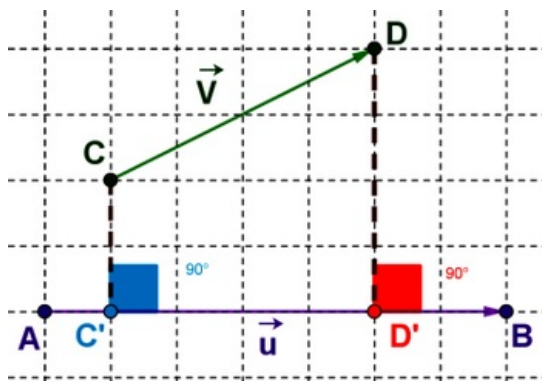
$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et

$\overline{\left(\vec{u}, \vec{v}\right)} = \overline{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \alpha [2\pi]$

La forme trigonométrique du produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \alpha$ ,  
 ou encore  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$

### Remarque

Le produit scalaire des vecteurs  $\vec{v} = \vec{CD}$  et  $\vec{u} = \vec{AB}$  est le nombre réel  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$  tel que  $C'$  et  $D'$  sont respectivement les projections orthogonales de  $C$  et  $D$  sur la droite  $(AB)$  :



## III- Orthogonalité de deux vecteurs

### Activité

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan tel que  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$ .

1. Donner la forme trigonométrique de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
2. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonales.

### Propriété

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan.

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

On note  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

## IV- Propriétés du produit scalaire

### Propriétés

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan  $(P)$

On a :

1. Linéarité du produit scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{array} \right.$$

2. Positivité du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$$

3. produit scalaire est non dégénéré :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

## Conséquences

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan ( $P$ )

On a :

$$\begin{aligned} 1 \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ 2 \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ 3 \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \\ 4 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left[ \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right] \end{aligned}$$

## V- Applications du produit scalaire

### 5-1/ Relations métriques dans un triangle rectangle

#### Activité

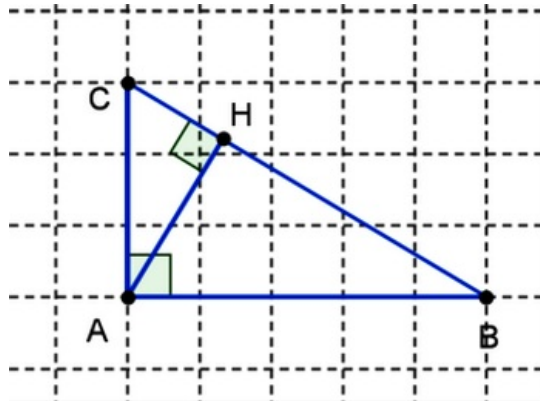
$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .

Le point  $H$  est la projection orthogonale de  $A$  sur la droite  $(BC)$ .

1. Calculer  $\cos B$  en utilisant les deux triangles  $ABC$  et  $ABH$ .
2. Montrer que  $BA^2 = BH \times BC$ .
3. Montrer que  $AH^2 = AB^2 - HB^2$ , et que  $AH^2 = AC^2 - HC^2$ .
4. En déduire que  $2AH^2 = BC^2 - (HB^2 + HC^2)$ .

On remarque que  $(HB + HC)^2 - 2HB \times HC = BC^2 - 2HB \times HC$ .

5. En déduire que  $AH^2 = HB \times HC$ .



#### Propriété

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .

Le point  $H$  est la projection orthogonale de  $A$  sur la droite  $(BC)$ .

On a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= BA^2 + AC^2 \\ BA^2 &= BH \times BC \\ CA^2 &= CH \times CB \\ AH^2 &= HB \times HC \end{aligned}$$

On les appelle les relations métriques dans un triangle rectangle.

## 5-2/ Théorème d'El Kashi

### Théorème

Dans tout triangle  $ABC$ , on pose  $AB = c$  et  $AC = b$  et  $BC = a$ .

On a :

1-  $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$  ou encore  $a^2 = c^2 + b^2 - 2c \times b \times \cos A$

2-  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos B$  ou encore  $b^2 = c^2 + a^2 - 2c \times a \times \cos B$

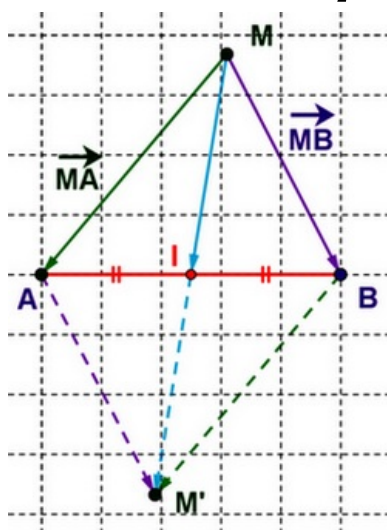
3-  $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB \times \cos C$  ou encore  $c^2 = b^2 + a^2 - 2b \times a \times \cos C$

## 5-3/ Théorème de la médiane

Soit un segment  $[AB]$  du plan  $(P)$ , le point  $I$  est son milieu.

Pour tout point  $M$  du plan  $(P)$ , on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

1. Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans les deux cas suivants :

1  $\|\vec{u}\| = 1$  ;  $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$  ;  $\overline{(\vec{u} \cdot \vec{v})} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

2  $\|\vec{u}\| = 2$  ;  $\|\vec{v}\| = \frac{2}{\sqrt{2}}$  ;  $\overline{(\vec{u} \cdot \vec{v})} \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral tel que  $AB = 4$ .

2. Calculer  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

3. Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté  $\overline{(\vec{u} \cdot \vec{v})}$  sachant que  $\|\vec{u}\| = 4$ ,  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2\sqrt{6}$ .

Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  tel que  $AB = 3$  et  $BC = 3\sqrt{3}$ .

4. Calculer  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

6. En déduire  $\widehat{CAB}$ .

### 6-2/ Exercice 2

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs orthogonaux du plan tels que  $\|\vec{u}\| = 4$  et  $\|\vec{v}\| = 5$ .

1. Déterminer le réel  $m$  sachant que  $(m\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 13$ .  $\cos(\widehat{A}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 1$ ,  $AC = \sqrt{2}$  et  $\cos(\widehat{A}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

2. Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

Considérons  $D$  un point du plan défini par  $\vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + 2\vec{AC})$ .

3. Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ .

### 6-3/ Exercice 3

$ABCD$  est un parallélogramme tel que  $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$  et  $AD = 4$  et  $CD = 6$ .

Soit  $O$  le milieu du segment  $[AB]$ .

1. Calculer les distances  $BD$  et  $AC$ .

2. Montrer que pour tout point  $M$  du plan, on a  $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 18$ .

3. En déduire l'ensemble des points  $M$  du plan tel que  $MA^2 + MB^2 = 24$ .

Soient  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$ , et  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$  et  $AB = 3$  et  $AC = 4$ .

4. Calculer les longueurs  $BC$ ,  $HC$ ,  $HB$  et  $AH$ .

### 6-4/ Exercice 4

Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 3$  et  $AC = 1$  et  $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{3}$ .

1. Vérifier que  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1$ .

2. Calculer la distance  $BC$ .

Soient  $I$  et  $J$  les milieux respectifs de  $[BC]$  et  $[AC]$ .

3. Calculer  $AI$  et  $BJ$ .

Soit  $E$  un point du plan tel que  $\vec{AE} = \frac{4}{9}\vec{AB}$ .