AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 11-2 : Espaces vectoriels (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

On munit $\mathbb{R}_+^*$ d'une loi de composition interne $\times$ et d'une loi de composition externe $\bullet$ comme suit :

- La loi $\times$ est la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}_+^*$.

- $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \lambda \bullet x = x^\lambda$

1. $\left(\mathbb{R}_+^*; \times; \bullet\right)$ est-il un espace vectoriel réel ?

4-2/ Exercice 2

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} / (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $J^2 = K$ et $K^2 = J + K$ et $JK = KJ = I + J$.
2. Montrer que $(E; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel, et déterminer sa dimension.
3. Montrer que $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif.
4. Déterminer J^{-1}.

4-3/ Exercice 3

Partie A

On définit dans $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$\text{Pour tout } (a;b;x;y) \in \mathbb{R}^4,\ \ (a+ib)*(x+iy) = ax + i\,(ay+bx)$$

1. Montrer que la loi $*$ est commutative, associative et admettant un élément neutre qu'on déterminera.
2. Déterminer G, ensemble des éléments symétrisables pour la loi $*$ et montrer que $(G;*)$ est un groupe commutatif.

Soit H une partie de $\mathbb{C}$ telle que $H \neq \{0\}$.

3. Montrer que si $(H;*)$ est groupe alors $H \subset G$.
4. Montrer que l'ensemble E définie par $E = \left\{e^t + ite^t / t \in \mathbb{R}\right\}$ est un sous-groupe de $(G;*)$.
5. Montrer que $(\forall z \in G)\ \bar{z} \in G$
6. Montrer que l'application $f : z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme de $(G;*)$.
7. Montrer que $*$ est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$.
8. Montrer que $(\mathbb{C};+;*)$ est un anneau non intègre.
9. Déterminer les diviseurs de zéro dans l'anneau $(\mathbb{C};+;*)$.

Partie B

On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ suivant :

$$\mathscr{E} = \left\{ M\,(a;b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} / \,(a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. Montrer que $(\mathscr{E};+;\bullet)$ est un espace vectoriel réel et en déterminer une base.
2. Montrer que $\mathscr{E}$ est stable dans $(\mathbb{M}_2\,(\mathbb{R});\times)$.
3. Montrer que l'application $f : z = a+ib \mapsto M\,(a;b)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C};*)$ dans $(\mathscr{E}\,;\times)$.
4. En déduire l'ensemble des matrices admettant un inverse dans $(\mathscr{E}\,;\times)$.

4-4/ Exercice 4

Partie A

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne comme suit :

$$\left(\forall\,(x;y) \in \mathbb{R}^2\right)\ x*y = x+y-e^{xy}+1$$

1. Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.
3. Sachant que l'équation $(E)\ :\ 3+x-e^{2x}=0$ admet deux solutions réelles distinctes α et β, montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

Partie B

On rappelle que $(\mathbb{M}_2\,(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau non commutatif d'élément unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe commutatif.

Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $M(x;y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$

Soit : $F = \left(M(x;y) / (x;y) \in \mathbb{R}^2\right)$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \bullet)$.
2. Montrer que F est une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$.

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans F est qui, à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, associe la matrice $M(x;y)$.

3. Montrer que l'application φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ dans $(F; \times)$.

On pose : $F^* = F - \{M(0;0)\}$

4. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$
5. Montrer que $(F^*; \times)$ est un groupe commutatif.
6. Montrer que $(F^*; +; \times)$ est un corps commutatif