Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 11-1 : Espaces vectoriels (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Espace vectoriel réel

1-1/ Loi de composition externe

Définition 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble.

On appelle loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur E, toute application de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on note en général $\alpha.x$ ou αx l'image de $(\alpha; x)$ par cette application.

Remarques

Dans la définition précédente, on peut avoir $E = \mathbb{K}$; et dans ce cas, on parle d'une loi de composition interne. Ainsi, toute loi de composition interne sur E peut être considérée comme une loi de composition externe sur E à coefficients dans E.

Au cours de ce chapitre, on prendra $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme corps de référence.

1-2/ Structure d'espace vectoriel réel

Définition 2

Un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est un triplet $(E;+;.)$ dans lequel E est un ensemble non vide muni :

(1) d'une loi de composition interne, notée $+$, telle que $(E;+)$ est un groupe commutatif, cette loi est l'addition de E et son élément neutre est noté 0_E.

(2) d'une loi de composition externe, application de R x E dans E , appelée produit externe ou produit par un scalaire, notée $(\alpha;x) \mapsto \alpha.x$, et possédant les propriétés suivantes :

$$\left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\ (\forall x\in E)\ (\alpha+\beta)x=\alpha.x+\beta.x$$
$$(\forall\alpha\in\mathbb{R})\ \left(\forall(x;y)\in E^2\right)\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$$
$$\left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\ (\forall x\in E)\ (\alpha\beta).x=\alpha.(\beta.x)$$
$$(\forall x\in E)\ 1.x=x$$

On appelle alors vecteurs les éléments de E et scalaires les éléments de $\mathbb{R}$.

Définition 3

$(E;+;.)$ est un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) lorsque :

(1) $(E;+)$ est un groupe commutatif.

(2) $\left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\ \left(\forall\vec{x}\in E\right)\ (\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha.\vec{x}+\beta.\vec{x}$

$(\forall\alpha\in\mathbb{R})\ \left(\forall\left(\vec{x};\vec{y}\right)\in E^2\right)\alpha.\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\alpha.\vec{x}+\alpha.\vec{y}$

$\left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\ (\forall x\in E)\ (\alpha\beta).\vec{x}=\alpha.\left(\beta.\vec{x}\right)$

$(\forall x\in E)\ 1.\vec{x}=\vec{x}$

1-3/ Règles de calcul dans un espace vectoriel réel

Proposition 1

$(E;+;.)$ est un espace vectoriel réel. Alors :

1) Tout vecteur de E est un élément régulier dans $(E;+)$.

2) Pour tout $\vec{x}\in E$: $0.\vec{x}=\vec{0}$

3) Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $\alpha.\vec{0}=\vec{0}$

4) Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et pour tout $\vec{x}\in E$: $\alpha.\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\alpha=0\ ou\ \vec{x}=\vec{0}\right)$

Proposition 2

$(E;+;.)$ est un espace vectoriel réel. Alors :

1) Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et pour tout $\vec{x}\in E$: $(-\alpha).\vec{x}=\alpha.\left(-\vec{x}\right)=-\left(\alpha.\vec{x}\right)$

2) Pour tout $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\in E^2$, l'équation $\vec{x}+\vec{u}=\vec{v}$ admet une solution unique dans E. Cette solution est $\vec{x}=\vec{v}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{v}-\vec{u}$. ($\vec{v}-\vec{u}$ étant la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre).

3) Pour tous $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ et pour tous $\left(\vec{x};\vec{y}\right)\in E^2$

$$\alpha.\left(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\right)=\alpha.\overrightarrow{x}-\alpha.\overrightarrow{y} \text{ et } (\alpha-\beta)\overrightarrow{x}=\alpha.\overrightarrow{x}-\beta.\overrightarrow{x}$$

II- Sous-espace vectoriel

2-1/ Définition et exemples

Définition 4

Étant donné un espace vectoriel réel $(E;+;.)$, une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

(1) $F \neq \emptyset$

(2) F est stable pour l'addition : $\left(\forall\left(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y}\right)\in F^2\right)\ \overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\in F$

(3) F est stable pour le produit externe : $\left(\forall\left(\alpha;\overrightarrow{x}\right)\in\mathbb{R}\times F\right)\ \alpha.\overrightarrow{x}\in F$

(4) $(F;+;.)$ est un espace vectoriel réel.

Remarques

Attention ! pour prouver que F est un sous-espace vectoriel de E, ne pas oublier de vérifier que $F\neq\emptyset$ et $F\subset E$. Le plus fréquent pour montrer que $F\neq\emptyset$ est de justifier que $\overrightarrow{0}\in F$.

E et $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E, $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est appelé le sous-espace nul.

Avec $\overrightarrow{u}=E-\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, le sous-ensemble $\mathbb{R}\overrightarrow{u}=\left\{\overrightarrow{\alpha u}/\alpha\in\mathbb{R}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé la droite vectorielle dirigée parle vecteur $\overrightarrow{u}$.

2-2/ Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Proposition 3

Soit $(E;+;.)$ un espace vectoriel réel et F une partie de E.

On a l'équivalence :

$$(F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E)\Leftrightarrow\begin{cases}F\neq\emptyset\\(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\left(\forall\left(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y}\right)\in F^2\right)\alpha.\overrightarrow{x}+\beta.\overrightarrow{y}\in F\end{cases}$$

Remarques

Dans un contexte de sous-espaces vectoriels, on étudie l'appartenance de $\overrightarrow{0}$ à F :

$\overrightarrow{0}\in F$ donne $F\neq\emptyset$

$\overrightarrow{0}\notin F$, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Lorsqu'on souhaite montrer qu'un ensemble F est un sous-vectoriel d'un espace vectoriel E, on aura le choix, ou bien d'utiliser la définition ou bien de se ramener à la proposition 3.

Dans la pratique, pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel réel, il peut être beaucoup plus facile de démontrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel réel connu. C'est pour cette raison qu'il faut connaître quelques espaces vectoriels réels les plus familiers, à savoir :

$$(\mathbb{R};+;\times)\ -\ (\mathbb{C};+;.)\ -\ (\mathbb{R}^n;+;.)\ -\ (\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;.)\ -\ (\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;.)\ -\ (\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;.)$$

III- Familles libres ou génératrices - bases

3-1/ Combinaisons linéaires

Définition 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ des vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E; +; .)$.

On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$, ou encore combinaison linéaire de la famille $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ tout vecteur de la forme :

$$\alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \alpha_2 \overrightarrow{x_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n \in \mathbb{R}$

Les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n$ sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i}$.

Remarques

Il s'agit évidemment d'une généralisation de la définition d'une combinaison linéaire de deux vecteurs vue dans la proposition 3. De plus, un vecteur $\overrightarrow{x}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ si, et seulement si, il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n$ tels que : $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i}$

Si F est un sous-espace vectoriel de $(E; +; .)$ contenant les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$, alors toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient encore à F.

3-2/ Familles libres - familles liées

Définition 6

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ est une famille libre de E, si :

$$(\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n)\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

On dit encore dans ce cas-là que les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ sont linéairement indépendants.

On dit que la famille $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ est une famille liée de E, si elle n'est pas libre. Cela signifie donc qu'il existe une famille $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n)$ de réels non tous nuls vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{0}$. On dit encore dans ce cas-là que les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ sont linéairement dépendants.

Remarque

Dans la pratique, lorsque qu'on s'intéresse à la liberté éventuelle d'une famille $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$, on considère $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \alpha_2 \overrightarrow{x_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{x_n} = \overrightarrow{0}$.

Si cette égalité nous conduit forcément vers $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, alors, la famille $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ est libre. Dans le cas contraire, elle est liée.

Proposition 4

Soit E un espace vectoriel réel.

1) Une famille $\left(\overrightarrow{x}\right)$ constituée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.

2) Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.

3) Si une famille $B = \left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ est libre, alors toute famille contenue dans B est aussi libre.

4) Si une famille $B = \left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ est liée, alors toute famille contenant B est aussi liée.

5) Une famille $B = \left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs de B est une combinaison linéaire des $n-1$ autres.

3-3/ Familles génératrices

Définition 7

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ une famille de vecteurs de E.

On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ est engendré par la famille $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Autrement dit :

$$(\exists\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n)\ \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{x_i}$$

On dit que la famille $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ est une famille génératrice de E, si :

$$\left(\forall \overrightarrow{x} \in E\right)(\exists\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n)\ \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{x_i}$$

On dit encore dans ce cas-là que la famille $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ engendre l'espace vectoriel E.

3-4/ Bases d'un espace vectoriel réel

Définition 8

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille B est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E, ce qui revient à écrire :

$$\left(\forall \overrightarrow{x} \in E\right)(\exists!\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n)\ \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{x_i}$$

Dans ces conditions, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ an s'appellent les composantes (ou coordonnées) du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base B, et on écrit $\overrightarrow{x}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{(B)}$, ou tout simplement $\overrightarrow{x}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Le réel a_k s'appelle la kème composante (ou coordonnée) de $\overrightarrow{x}$ dans la base B.

Remarques

- Plaçons-nous dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^n; +; .)$.

On a déjà vu que la famille de vecteurs $B = \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \ldots; \overrightarrow{e_n}\right)$ définie par

$\overrightarrow{e_1}\,(1; 0; \ldots; 0)$; $\overrightarrow{e_2}\,(0; 1; \ldots; 0)$; ... ; $\overrightarrow{e_n}\,(0; 0; \ldots; 1)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel.

Par ailleurs, si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$, alors $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, ce qui montre que la famille B est libre. C'est donc une base, appelée base canonique de l'espace vectoriel réel B. C'est la base la plus naturelle et la plus simple de $\mathbb{R}^n$.

- Une fois choisie une base $B = \left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ de E, il arrive souvent que l'on identifie chaque vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ avec le n-uplet de ses composantes. C'est pourquoi, une base doit être une famille (ordonnée) et non un ensemble. Par exemple, si $B = \left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\right)$ est une base de E, alors le vecteur de composantes $(1; 2; 3)$ dans la base B est $\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$ et non pas $\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_3}$.

Proposition 5

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = \left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ une base de E.

Soit x et y deux vecteurs de E tels que $\overrightarrow{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n)_{(B)}$ et $\overrightarrow{y}(\beta_1, \beta_2, \ldots., \beta_n)_{(B)}$

Alors :

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots., \alpha_n + \beta_n)_{(B)} \text{ et } \lambda\overrightarrow{x}(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots., \lambda\alpha_n)_{(B)} \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

3-5/ Dimension d'un espace vectoriel

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = \left(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \ldots; \overrightarrow{x_n}\right)$ une base de E.

Alors, toutes les bases de E ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé la dimension de E et noté $dimE$, et on écrit $dimE = n$.

Proposition 7

1- Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base de E.

Soit $B' = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$ une famille de vecteurs de E tels que $\overrightarrow{u}\ (a; b)$ et $\overrightarrow{v}\ (a'; b')$ dans la base B.

Alors :

$$(B' \text{ est une base de } E) \Leftrightarrow (B' \text{ est génératrice de } E) \Leftrightarrow (B' \text{ est libre dans } E) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

2- Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un base de E.

Soit $B' = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\right)$ une famille de vecteurs de E tels que $\overrightarrow{u}\ (a; b; c)$ et $\overrightarrow{v}\ (a'; b'; c')$ et $\overrightarrow{w}\ (a''; b''; c'')$ dans la base B. Alors :

$$(B' \text{ est une base de } E) \Leftrightarrow (B' \text{ est génératrice de } E) \Leftrightarrow (B' \text{ est libre dans } E) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$$

Remarque

La proposition 7 est d'une importance pratique capitale. Elle affirme qu'une famille de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel devient une base dès qu'elle est libre ou génératrice.

En pratique, il est plus facile de vérifier qu'elle est libre soit en calculant le déterminant soit par un calcul direct.