

Sommaire

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

9-2/ Partie 2

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

Soit  $E = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

Pour tout  $(a; b) \in E^2$ , on pose :  $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

1) Vérifier que pour tout  $(a; b) \in E^2$  :

$$a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (a\sqrt{2} - 1) (b\sqrt{2} - 1)$$

2. En déduire que  $\perp$  est une loi de composition interne dans  $E$ .

3. Montrer que  $(E; \perp)$  est un groupe commutatif.

9-2/ Partie 2

On rappelle que  $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$  est un anneau d'unité  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des matrices de  $M_2(\mathbb{R})$  qui s'écrivent sous la forme :

$$M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

On pose :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que  $A^2 = -2A$  et  $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$ .

2. Montrer que  $\mathcal{F}$  est stable dans  $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$ .

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : (E; \perp) &\rightarrow (\mathcal{F}; \times) \\ a &\mapsto \varphi(a) = M(a) \end{aligned}$$

3. Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme.

4. En déduire la structure de  $(\mathcal{F}; \times)$ .