Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 10-3 : Structures algébriques - Problème de synthèse

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

9-2/ Partie 2

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

Soit $E=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

Pour tout $(a;b)\in E^2$, on pose : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$

1)Vérifier que pour tout $(a;b)\in E^2$:

$$a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$$

2. En déduire que $\perp$ est une loi de composition interne dans E.
3. Montrer que $(E;\perp)$ est un groupe commutatif.

9-2/ Partie 2

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous la forme :

$$M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a&a\\a&\sqrt{2}-a\end{pmatrix}\quad(a\in\mathbb{R})$$

On pose : $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

1. Vérifier que $A^2=-2A$ et $M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A$.
2. Montrer que $\mathscr{F}$ est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$.

On considère l'application :

$$\begin{aligned}\varphi:(E;\perp)&\to(\mathscr{F};\times)\\a&\mapsto\varphi(a)=M(a)\end{aligned}$$

3. Montrer que φ est un isomorphisme.

4. En déduire la structure de $(\mathscr{F}; \times)$.