Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 10-1-2 : Structures algébriques - Partie 1 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IV- Exercices I

4-1/ Exercice 1-1

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ comme suit : $x * y = xy - 3x - 3y + 12$

1. Déterminer l'élément neutre e dans $(\mathbb{R}; *)$.
2. Déterminer les éléments symétrisables dans $(\mathbb{R}; *)$.
3. Montrer que $]3; +\infty[$ est stable dans $(\mathbb{R}; *)$.

Soit $x \in]3; +\infty[$ et x' son symétrique dans $(\mathbb{R}; *)$.

4. A-t-on $x' \in]3; +\infty[$? Justifier votre réponse.

4-2/ Exercice 1-2

On définit sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, la loi de composition interne T définie comme suit :

$$zTz' = z.z' + i\,(z + z') - 1 - i$$

On pose : $E = \mathbb{C} - \{-i\}$

1. Montrer que E est stable dans $(E; T)$.
2. Montrer que T admet un élément neutre.
3. Montrer que tout élément de E admet un symétrique dans $(E; T)$.

On considère l'application : $f : \mathbb{C}^* \to E$

$z \mapsto f\,(z) = z - i$

4. Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ dans $(E; T)$.
5. Montrer que T est commutative et associative.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

6. Déterminer le symétrique de $f(z)$ dans $(E;T)$.

4-3/ Exercice 1-3

Soit $(E;.)$ un ensemble muni d'une loi multiplicative.

On suppose que la loi . est associative, admet un élément neutre e et tout élément x de E admet un symétrique noté x^{-1}.

Soit l'ensemble : $C = \{a \in E / (\forall x \in E)\ xa = ax\}$

1. Vérifier que $C \neq \emptyset$. Dans quel cas $C = E$?
2. Montrer que C est une partie stable de $(E;.)$ et que : $\left(\forall (a;b) \in C^2\right)\ ab^{-1} \in C$

Soit $a \in E$, et on considère l'application : $f_a : E \to E$

$x \mapsto axa^{-1}$

Soit $E' = \{f_a / a \in E\}$

3. Montrer que f_a est un isomorphisme de $(E;.)$ dans $(E;.)$.
4. Montrer que $(E';\circ)$ admet un élément neutre et que $\circ$ est associative et que tout élément de E' est symétrisable.

Soit φ l'application définie de E dans E' par : $\varphi(a) = f_a$

5. Montrer que φ est un morphisme de $(E;.)$ dans $(E';\circ)$, puis montrer que si φ est un isomorphisme alors $C = \{e\}$.

4-4/ Exercice 1-4

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application T_a définie par :

$$T_a : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$$
$$M(x;y) \mapsto M'(x';y')$$

avec : $x' = x + a$ et $y' = ye^a$

On considère l'ensemble : $E = \{T_a / a \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que la composition des applications « $\circ$ » est une loi de composition interne dans E.

On considère l'application : $\varphi : \mathbb{R} \to E$

$a \mapsto T_a$

2. Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(E;\circ)$.
3. En déduire l'élément neutre de $(E;\circ)$.
4. Déterminer $(T_a)^{-1}$ dans $(E;\circ)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Partie B

Soit T une loi de composition interne associative définie sur un ensemble E et a un élément de E.

Soit * la loi de composition interne définie sur E par : $(\forall (x;y) \in E)\ x * y = xTaTy$

1. Montrer que la loi * est associative.
2. Montrer que si la loi T est commutative alors la loi * l'est aussi.

On suppose que la loi T est commutative et admet un élément neutre e tel que $e \neq a$ et que a admet un symétrique dans $(E;T)$.

3. Montrer que $(E;*)$ admet un élément neutre.

Soit $x \in E$ et x' son symétrique dans $(E;T)$.

4. Établir que x est symétrisable dans $(E;*)$