

I- Exercice 1 (6 pts)

Partie 1

ABC est un triangle équilatéral tel que : $\overline{(\vec{AB}; \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On construit à l'extérieur de ce triangle un parallélogramme $BCDE$.

On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Construire le point F l'image du point E par la rotation r , puis montrer que CFD est un triangle équilatéral.
2. Montrer que : $\overline{(\vec{BE}; \vec{BA})} \equiv \overline{(\vec{CF}; \vec{CA})} [2\pi]$
3. Que peut-on dire sur le point F si E appartient à (AB) ?

Partie 2

Soit ABC un triangle et D un point tel que $D = \text{bar} \{(B; 1), (C; 2)\}$.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Construire les points B' , C' et D' les images respectives de B , C et D par r .
2. Montrer que les points B' , C' et D' sont alignés.

II- Exercice 2 (5 pts)

Partie 1

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $\overline{(\vec{AB}; \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Soit I le milieu du segment $[BC]$.

E et F sont deux points du plan tels que $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ et $\vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{BA}$

On considère la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que le triangle EIF est rectangle isocèle en I

Partie 2

$ABCD$ un carré tel que $\overline{(\vec{AB}; \vec{AD})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Soit E un point du segment $[BC]$ tel que E est différent de B et C .

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les images des deux droites (BC) et (AE)
2. En déduire l'image du point E par la rotation r .

III- Exercice 3 (6 pts)

Partie 1

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} ; x < 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} ; x > 1 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Conclure.

On considère la fonction g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + 1}{-x + 3} ; x \leq 1 \\ g(x) = 1 - ax^2 ; x > 2 \end{cases}$$

2. Déterminer une valeur de a pour laquelle g admet une limite en 2.

Partie 2

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$

2. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2 - \cos x}$

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2$

3. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) |f(x) - 2| \leq |x|$, puis déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Partie 3

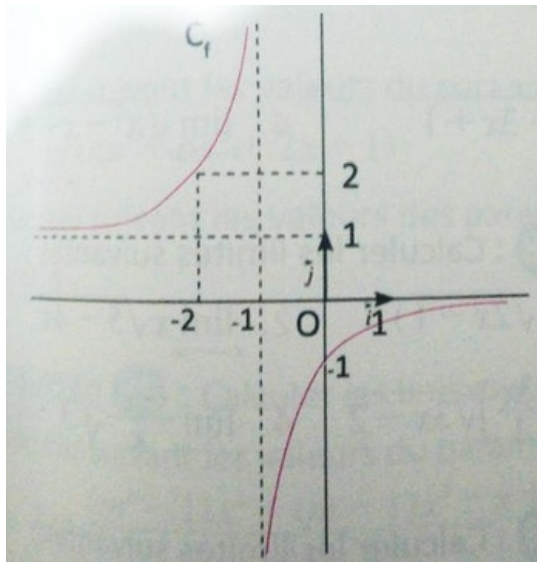
On considère la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{4 \sin(x) + 3x}{x - 1}$

1. Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[) |g(x) - 3| \leq \frac{7}{x - 1}$

2. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

IV- Exercice 4 (3 pts)

La figure suivante représente la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$:



1. Déterminer par lecture graphique les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} =$$