

I- Exercice 1

On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $(E) 143x - 195y = 52$.

1. Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans \mathbb{Z}^2 .
2. Sachant que $(-1; -1)$ est une solution particulière de l'équation (E) , résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

Soit n un entier naturel non nul premier avec 5.

3. Montrer que pour tout k de \mathbb{Z} , on a : $n^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$.

Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y \pmod{4}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y \pmod{5}$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y \pmod{10}$.

Soient x et y deux entiers naturels tel que (x, y) est solution de l'équation (E) .

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

II- Exercice 2

On considère la fonction G définie sur \mathbb{R} par : $G(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} dt$

1. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée $G'(x)$
2. Montrer que G est impaire
3. Montrer que $(\forall t \geq 0) \frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$
4. Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$
5. Montrer que $(\forall t \geq 1) 1 + 4t^2 \geq (1 + t)^2$
6. Déduire que $(\forall x > 1) G(x) \leq G(1) - \ln 4 + 2 \ln(x + 1)$
7. Étudier la branche infinie de la courbe (\mathcal{C}_G) au voisinage de $+\infty$
8. Montrer que G est bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R}

Soit F la réciproque de G .

9. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et $(\forall x \in \mathbb{R}) F'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4F^2(x)}$
10. Montrer que F est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et que $F''(x) - F(x) = 0$
11. Calculer $F'(0)$ et $F(0)$, puis déterminer $F(x)$ et $G(x)$ en fonction de x

III- Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la fonction f_n sur $]1, +\infty[$ par $f_n(x) = \ln(x-1) + P_n(x)$ avec $P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$

1. Étudier le sens de variation de P_n sur $]1, +\infty[$
2. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $]1, +\infty[$
3. Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) f'_n(x) = \frac{x^n}{x-1}$, et donner le tableau de variation de f_n
4. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution b_n
5. Montrer que la suite $(b_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente
6. Tracer la courbe (\mathcal{C}_2) , on donne $1 < b_2 < 1,2$

Soit p un entier de \mathbb{N}^* .

7. Montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \int_p^{p+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{p}$
8. Montrer que $(\forall n \geq 2) \ln(n+1) \leq P_n(1)$
9. Dédire que $(\forall n \geq 2) f_n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$
10. Étudier le sens de variation de f'_{n+1} sur l'intervalle $]1, 1 + \frac{1}{n+1}[$
11. En utilisant le théorème des accroissements finis à f_{n+1} sur $[b_{n+1}, b_n]$, montrer que :
$$b_{n+1} - 1 \leq (n+1)(b_n - b_{n+1}) \leq b_n - 1$$
12. Dédire un encadrement du nombre b_3