AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 2 Devoir 1 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E) $143x - 195y = 52$.

1. Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Sachant que $(-1;-1)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

Soit n un entier naturel non nul premier avec 5.

3. Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a : $n^{4k} \equiv 1 \ [5]$.

Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y \ [4]$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y \ [5]$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y \ [10]$.

Soient x et y deux entiers naturels tel que (x, y) est solution de l'équation (E).

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

II- Exercice 2

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} \, \mathrm{d}t$

1. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée $G'(x)$
2. Montrer que G est impaire
3. Montrer que $(\forall t \geq 0)$ $\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$
4. Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$
5. Montrer que $(\forall t \geq 1)$ $1 + 4t^2 \geq (1+t)^2$
6. Déduire que $(\forall x > 1)$ $G(x) \leq G(1) - \ln 4 + 2\ln(x+1)$
7. Étudier la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C}_G)$ au voisinage de $+\infty$
8. Montrer que G est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Soit F la réciproque de G.

9. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})$ $F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4F^2(x)}$
10. Montrer que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F''(x) - F(x) = 0$
11. Calculer $F'(0)$ et $F(0)$, puis déterminer $F(x)$ et $G(x)$ en fonction de x

III- Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définie la fonction f_n sur $]1,+\infty[$ par
$f_n(x) = \ln(x-1) + P_n(x)$ avec $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$

1. Étudier le sens de variation de P_n sur $]1,+\infty[$
2. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $]1,+\infty[$
3. Montrer que $(\forall x \in]1,+\infty[)\ f'_n(x) = \frac{x^n}{x-1}$, et donner le tableau de variation de f_n
4. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seul solution b_n
5. Montrer que la suite $(b_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_2)$, on donne $1 < b_2 < 1,2$

Soit p un entier de $\mathbb{N}^*$.

7. Montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}^*)\ \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \leq \frac{1}{p}$
8. Montrer que $(\forall n \geq 2)\ \ln(n+1) \leq P_n(1)$
9. Déduire que $(\forall n \geq 2)\ f_n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$, puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1$
10. Étudier le sens de variation de f'_{n+1} sur l'intervalle $\left]1, 1 + \frac{1}{n+1}\right[$
11. En utilisant le théorème des accroissements finies à f_{n+1} sur $[b_{n+1}, b_n]$, montrer que :
$$b_{n+1} - 1 \leq (n+1)(b_n - b_{n+1}) \leq b_n - 1$$
12. Déduire un encadrement du nombre b_3