Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 9 (La dérivation d'une fonction numérique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

6-6/ Exercice 6

I- La dérivabilité d'une fonction en un point

1-1/ Le nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que la fonction f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel l tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

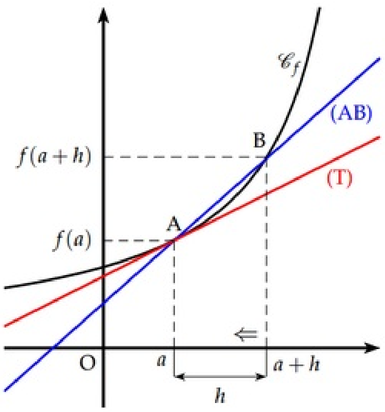
Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a, il est noté : $f'(a)$

On écrit : $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$ ou $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

Exemple

Étudions la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto 2x^2$ en $a = 1$

1-2/ Interprétation géométrique du nombre dérivé – La tangente à la courbe en un point



Le coefficient directeur α de la droite (AB) est :

$$\alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A (h tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en $x = a$. Le coefficient directeur de cette tangente (T) est appelé **nombre dérivé**. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Définition

Soit f une fonction dérivable en un point a et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

La droite (T) qui passe par le point $A(a, f(a))$ et qui est a pour coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe (C_f) au point A.

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un point a.

Une équation de la droite tangente à la courbe (C_f) de la fonction f au point $A(a, f(a))$ est :

$$(T) \ : \ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple

Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction $x \mapsto f(x) = 2x^2$ au point $A(1, f(1))$.

1-3/ Approximation d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine

Définition

Soit f une fonction dérivable en un point a.

La fonction $u : x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a.

Le réel $f'(a)(x-a) + f(a)$ est l'approximation affine du réel $f(x)$ au voisinage de a, on écrit :

$$f(x) \underset{a}{\tilde{}} f'(a)(x-a) + f(a)$$

II- Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

2-1/ Définitions et propriétés

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $([a; a+r[\ r > 0)$

On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a, et on le note par : $f'_d(a)$

On écrit : $f'_d(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $(]a-r; a]\ r > 0)$

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a, et on le note par : $f'_g(a)$

On écrit : $f'_g(a) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Propriété

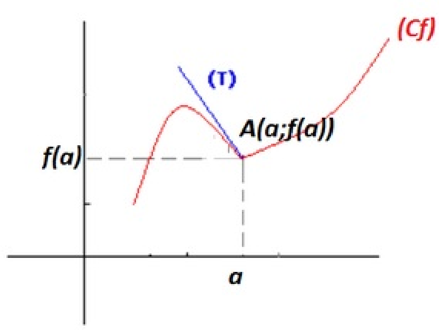
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

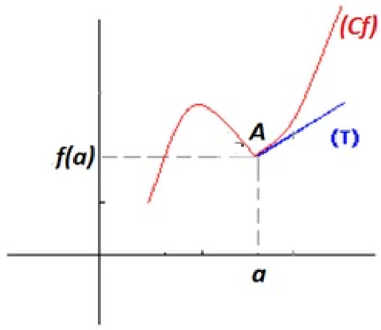
f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a et f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

2-2/ Interprétation géométrique - Demi droite tangente en un point de la courbe

Si f est dérivable à droite en , cela signifie graphiquement que la courbe de la fonction f admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation : $(T_d)\ :\ y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$

Si f est dérivable à gauche en a, cela signifie graphiquement que la courbe de la fonction f admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation : $(T_g)\ :\ y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$





$$\begin{cases}(T): y = f_g'(a)(x-a)+f(a) \\ x \leq a\end{cases} \qquad \begin{cases}(T): y = f_d'(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a\end{cases}$$

Résumé de La dérivabilité en un point - Interprétation géométrique du nombre dérivé

La limite	La dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable en a et on a : $f'(a)=l$	(C_f) admet une tangente d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ au point $A(a;f(a))$.
$\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$	f n'est pas dérivable en a.	(C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x=a$ au point $A(a;f(a))$.
$\lim\limits_{x\to a^{+}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à droite en a et on a : $f_d'(a)=l$	(C_f) admet une demi-tangente au point $A(a;f(a))$ d'équation $y=f_d'(a)(x-a)+f(a)$ et $x\geq a$.
$\lim\limits_{x\to a^{-}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à gauche en a et on a : $f_g'(a)=l$	(C_f) admet une demi-tangente au point $A(a;f(a))$ d'équation $y=f_g'(a)(x-a)+f(a)$ et $x\leq a$.

III- La fonction dérivé d'une fonction dérivable

3-1/ La fonction dérivé

Définitions

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert $]a;b[$ si f est dérivable en tout point de $]a;b[$.

On dit qu'une fonction f est dérivable sur l'intervalle fermer $[a;b]$ si f est dérivable sur $]a;b[$ et f dérivable à droite en a et à gauche en b.

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I, alors la fonction dérivée de f est la fonction noté f' est définie de I vers $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f' : I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Exemples

1- Montrons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons la fonction dérivée $f'(x)$.

2- Etudier la dérivabilité de la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$ eet déterminons la fonction dérivée $g'(x)$ sur $0;+\infty[$.

3-2/ La fonction dérivée seconde - la fonction dérivée d'ordre n

Définition

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I de fonction dérivée f'.

Si f' est aussi dérivable sur un intervalle I, alors on dit que f est dérivable deux fois sur l'intervalle I et la dérivée de f' notés f'' est appelée la dérivée seconde de la fonction f, et on a : $f'' = (f')'$

Si f est n fois sur l'intervalle I ($n \in \mathbb{N}^*$), alors la fonction dérivée de f d'ordre n noté $f^{(n)}$:

$$f^{(n)} : I \mapsto \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f^{(n)}(x)$$

Exemple

Montrons que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et déterminons $f''(x)$.

3-3/ Fonction dérivée des fonctions usuelles

La fonction f	L'ensemble de définition de f	La fonction f'	L'ensemble de définition de f'
$f : x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : \mapsto \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$f : x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto a$	$\mathbb{R}$

3-4/ Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Si f et g sont deux fonction dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$, alors on a :

1) La fonction $f + g$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(f + g)' = f' + g'$

2) La fonction $k.f$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(k.f)' = k.f'$

3) La fonction $f \times g$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

4) Si de plus $(\forall x \in I)\ g(x) \neq 0$, alors :

- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

Remarque

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété

Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

IV- Applications de la dérivation

4-1/ Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur l'intervalle I, alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) \geq 0$

- Si f est décroissante sur l'intervalle I, alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) \leq 0$

- Si f est constante sur l'intervalle I, alors : $(\forall x \in I)\ f'(x) = 0$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la dérivée f' est strictement positive sur l'intervalle I, sauf peut-être en des points isolés de I où f' s'annule, alors la fonction f est strictement croissante sur I

- Si la dérivée f' est strictement négative sur l'intervalle I, sauf peut-être en des points isolés de I où f' s'annule, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

4-2/ Extremums d'une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f admet un extremum local au point a, alors $f'(a) = 0$.

V- Équations différentielle $y'' + w^2 y = 0$

Définition

Soit w un nombre réel non nul.

L'équation $y'' + w^2 y = 0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y'' est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.

Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'égalité $f''(x) + w^2 f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée solution de l'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$.

Propriété

Soit w un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto y(x) = \alpha\cos(wx) + \beta\sin(wx)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = 3x^2 + x - 2$; $x_0 = 1$ 2 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$; $x_0 = 1$ 3 $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$; $x_0 = 0$ 4 $f(x) = \frac{x^2-3x-1}{x^2+1}$; $x_0 = 0$	5 $f(x) = \sqrt{x+1}$; $x_0 = 3$ 6 $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$; $x_0 = 2$ 7 $f(x) = \sqrt{x+10}$; $x_0 = -1$

6-2/ Exercice 2

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x - 1 \quad si \quad x < 1 \\ f(x) = \frac{x-3}{2x-1} \quad si \quad x > 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$$

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, et donner une interprétation géométrique du résultat.
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1, et donner une interprétation géométrique du résultat.
3. Étudier la dérivabilité de f au point 1.

6-3/ Exercice 3

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3 \; si \; x < -1 \\ f(x) = \frac{x+4}{2x+3} \; si \; x > -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en -1, et donner une interprétation géométrique du résultat.
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche en -1, et donner une interprétation géométrique du résultat.
3. Étudier la dérivabilité de f au point -1.

6-4/ Exercice 4

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$1\ \ f(x) = 3x^2 + x - 2$ $2\ \ f(x) = \left(x^3 + 2x^2 + x - 2\right)^7$ $3\ \ f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$ $4\ \ f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x^2+1}$ $5\ \ f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ $6\ \ f(x) = (3x+2)\sqrt{x^2 - 3x + 2}$	$7\ \ f(x) = x^2 - \sqrt{x+10}$ $8\ \ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ $9\ \ f(x) = \left(\sqrt{x+3}\right)^3 \sin x$ $10\ \ f(x) = \cos x\sqrt{x+4}$ $11\ \ f(x) = \sin(3x-2) + 5\cos(7x+3)$ $12\ \ f(x) = \sin\left(3x^2 - 2x + 3\right)$

6-5/ Exercice 5

Soit f la fonction suivante : $f(x) = \left(\frac{3x-2}{2x+3}\right)^4$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Étudier la dérivabilité de f sur D_f.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite tangente (T) à la courbe de f au point $A\left(\frac{2}{3};0\right)$.
4. Déterminer $f'(x)$ la dérivée de f sur D_f.

6-6/ Exercice 6

Partie 1

On considère la fonction g définie sur $I = [-2;3]$ par $g(x) = 3x - x^3$.

1. Calculer $g'(x)$ la fonction dérivée de g sur I.
2. Étudier les variations de g, puis donner son tableau de variations sur I.
3. Déterminer les extremum de g sur $\left]-\frac{3}{2};0\right[$ et $[-2;0]$ et I.

Partie 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$1\ \ y'' + 3y = 0$$
$$2\ \ y'' + 2y = 0$$
$$3\ \ 6y'' + 3y = 0$$