AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 10-1-1 : Structures algébriques - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Loi de composition interne

1-1/ Introduction

L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n	Notation : $\mathcal{P}_n$ ou $\mathbb{R}_n[X]$
$P \in \mathcal{P}_n$ signifie que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n $\left(\forall (P;Q) \in \mathcal{P}_n^2\right)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \begin{cases}(P+Q)(x) = P(x)+Q(x)\\(P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x)\end{cases}$	

L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$	Notation : $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$
$\mathcal{F}(I;\mathbb{R}) = \{f \,/\, f : I \to \mathbb{R} \ ,\ x \mapsto f(x)\}$ $\left(\forall (f;g) \in (\mathcal{F}(I;\mathbb{R}))^2\right)\ (\forall x \in I)\ \begin{cases}(f+g)(x) = f(x)+g(x)\\(f\times g)(x) = f(x)\times g(x)\end{cases}$	

L'ensemble des classes modulo n	Notation : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};...;\overline{n}\}$ Pour tous $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$ et $\overline{x}\times\overline{y}=\overline{x\times y}$	

L'ensemble des parties d'un ensemble A	Notation : $\mathscr{P}(A)$
$X\in\mathscr{P}(A)\Leftrightarrow X\subset A$ Pour tous X et Y de $\mathscr{P}(A)$: $x\in X\cap Y\Leftrightarrow(x\in X \text{ et } x\in Y)$; $x\in X\cup Y\Leftrightarrow(x\in X \text{ ou } x\in Y)$ $x\in\overline{X}\Leftrightarrow(x\in A \text{ et } x\notin X)$; $x\in X-Y\Leftrightarrow(x\in X \text{ et } x\notin Y)$; $X\Delta Y=(X-Y)\cup(Y-X)$	

L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2	Notation : $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$
$\mathbb{M}_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} / (a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4\right\}$ On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ comme suit : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & c+z \\ b+y & d+t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+cy & az+ct \\ bx+dy & bz+dt \end{pmatrix}$	

L'ensemble des matrices carrées d'ordre 3	Notation : $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$
$\mathbb{M}_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} / (a_1;a_2;a_3;b_1;b_2;b_3;c_1;c_2;c_3)\in\mathbb{R}^9\right\}$ On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ comme suit : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ b_1+y_1 & b_2+y_2 & b_3+y_3 \\ c_1+z_1 & c_2+z_2 & c_3+z_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1 & a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2 & a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3 \\ b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1 & b_1x_2+b_2y_2+b_3z_2 & b_1x_3+b_2y_3+b_3z_3 \\ c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1 & c_1x_2+c_2y_2+c_3z_2 & c_1x_3+c_2y_3+c_3z_3 \end{pmatrix}$	

L'ensemble des transformations du plan	Notation : $\mathscr{T}$
Toute application bijective de plan $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ s'appelle une transformation du plan. Les translations, les homothéties et les rotations font parties de l'ensemble des transformations $\mathscr{T}$. $(\forall(f;g)\in\mathscr{T}^2)(\forall M\in\mathscr{P})\quad(fog)(M)=f(g(M))$	

1-2/ Définition d'une loi de composition interne

Définition 1

On appelle loi de composition interne sur un ensemble E, toute application de $E\times E$ dans E .

Traditionnellement, on utilise la notation $x*y$ pour désigner l'image d'un couple $(x;y)\in E\times E$ par une loi $*$ plutôt qu'une notation fonctionnelle.

On note $(E;*)$ un ensemble E muni d'une loi de composition interne « $*$ ».

Applications

Pour tous x et y de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose : $x*y=x+y-2xy$.

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Sur l'intervalle $I=]-1;1[$, on définit la relation $\perp$ par : $\left(\forall\,(x;y)\in I^2\right)\ x\perp y=\frac{x+y}{1+xy}$

2. La relation $\perp$ est-elle une loi de composition interne sur I ? Justifier.

On considère l'ensemble $E=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ où les fonctions $f_i\,(i\in\{1;2;3;4\})$ des fonctions numériques définies de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_1:x\mapsto x\ \ ;\ \ f_2:x\mapsto -x\ \ ;\ \ f_3:x\mapsto \frac{1}{x}\ \ ;\ \ f_4:x\mapsto -\frac{1}{x}$$

3. Dresser la table de $(E;\circ)$.
4. Montrer que $\circ$ (composition des fonctions) est une loi de composition interne sur E.

1-3/ Partie stable - Loi induite

Définition 2

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et F une partie de E.

On dit que F est stable par $*$ si : $\left(\forall\,(x;y)\in F^2\right)\ x*y\in F$

La loi de composition interne alors définie sur F par $F^2\to F$
$(x;y)\mapsto x*y$ est appelée loi induite par $*$ sur F.

Applications

On considère l'ensemble $S=\left\{x^2+y^2/\,(x;y)\in\mathbb{N}^2\right\}$

1. Montrer que S est une partie stable de $(\mathbb{N};\times)$.
2. L'ensemble S est-il stable pour l'addition dans $\mathbb{N}$? Justifier.

On considère les ensembles $A=\left\{3^n\times 2^m/\,(n;m)\in\mathbb{N}^2\right\}$ et $B=\left\{n^2/n\in\mathbb{N}\right\}$

3. Étudier la stabilité de A pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$.
4. Étudier la stabilité de B pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$.

On considère l'ensemble $G=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}/\,(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

5. Montrer que G est une partie stable de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

II- Propriétés d'une loi de composition interne

2-1/ Associativité - Commutativité

Définition 3

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

On dit que la loi $*$ est associative dans $(E;*)$ si :

$$\left(\forall\,(a;b;c)\in E^3\right)\ \ (a*b)*c=a*(b*c)$$

On dit que la loi $*$ est commutative dans $(E;*)$ si :

$$\left(\forall\,(a;b)\in E^2\right)\ a*b=b*a$$

Remarques

La loi $*$ n'est pas commutative dans $(E;*)$ signifie que :

$$\left(\exists\,(a;b)\in E^2\right)\;\; a*b\neq b*a$$

La loi $*$ n'est pas associative dans $(E;*)$ signifie que :

$$\left(\exists\,(a;b;c)\in E^3\right)\;\; (a*b)*c\neq a*(b*c)$$

Si la loi $*$ est associative dans $(E;*)$, alors on peut supprimer les parenthèses et écrire :

$$(a*b)*c=a*(b*c)=a*b*c$$

Applications

Étudier la commutativité et l'associativité de la loi de composition interne T définie sur $E=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ par :

$$(a;b)T\,(x;y)=(ax;ay+bx)$$

2-2/ L'élément neutre

Définition 5

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Un élément e de $(E;*)$ est dit neutre si : $(\forall x\in E)\; e*x=x*e=x$

Remarques

- Si la loi $*$ est commutative dans $(E;*)$, alors une des relations de la définition 5 suffit.

On peut prendre alors soit $(\forall x\in E)\; e*x=x$, ou bien $(\forall x\in E)\; x*e=x$.

- Si S est une partie stable de $(E;*)$, et si e est neutre dans $(E;*)$, alors cela n'implique pas que e est neutre dans $(S;*)$.

À titre d'exemple : Prenons $E=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $S=\left\{\bar{0};\bar{2};\bar{4}\right\}$

$\bar{1}$ est neutre dans E et $\bar{4}$ est neutre dans S.

Applications

On munit l'ensemble $\mathbb{Z}$ d'une loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall\,(x;y)\in\mathbb{Z}^2\right)\; x*y=x+y-3$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z};*)$ admet un élément neutre.

On considère l'ensemble : $A=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}/\,(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$

2. Montrer que $\times$ est une loi de composition interne sur A.
3. Est-ce-que $(A;\times)$ admet un élément neutre ? Justifier.

Proposition 1

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Si e et e' sont deux éléments neutres pour la loi $*$ dans E, alors $e=e$'.

Autrement dit : un élément neutre pour une loi de composition interne, lorsqu'il existe, est unique.

2-3/ Symétrique d'un élément

Définition 6

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et possédant un élément neutre e.

Un élément $a \in E$ est dit symétrisable (ou inversible) pour $*$ s'il existe un élément $a' \in E$ tel que $a * a' = a' * a = e$

Un tel élément a' (s'il existe) est appelé un symétrique (ou inverse) de a pour $*$.

Remarques

Si a' est un symétrique de a pour la loi $*$, alors a est un symétrique de a' pour la même loi.

Si la loi $*$ est commutative, alors on peut se contenter de l'une des relations $a * a' = e$ ou $a' * a = e$.

Si a' est un symétrique de a pour la loi $*$, on dit alors que a et a' sont symétriques dans $(E;*)$.

Proposition 2

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre e.

Si un élément $a \in E$ est symétrisable, alors, le symétrique de a est unique.

Remarques

Le symétrique d'un élément a se note :

- a^{-1} pour une loi notée multiplicativement et s'appelle inverse de a.
- $-a$ pour une loi notée additivement et s'appelle opposé de a.

Lorsque f est une bijection de E dans E, il n'y a donc pas ambiguïté dans la notation f^{-1}, il s'agit aussi bien de son application réciproque que de son inverse pour la loi $\circ$.

Proposition 3

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre e.

Si a et b sont deux éléments symétrisables, alors $a * b$ est aussi symétrisable et son symétrique est $(a * b)' = b' * a'$, où a' et b' sont respectivement les symétriques de a et b.

Applications

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne définie comme suit :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right)\ x * y = x + y + \frac{1}{2}xy$$

1. Montrer que la loi $*$ est associative.
2. Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
3. Déterminer les éléments symétrisables pour la loi $*$.
4. Montrer que le symétrique de -1 est 2, et que le symétrique de 6 est -3.

2-4/ Élément régulier d'une loi de composition interne

Définition 7

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Un élément $a \in E$ est dit régulier ou simplifiable si, et seulement si :

$$\left(\forall (x;y) \in E^2\right) \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y \ 1 \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \ 2 \end{cases}$$

Remarque

Si la loi * est commutative dans E, alors l'une des implications 1 ou 2 suffit pour que l'élément a soit régulier dans $(E;*)$..

Applications

On considère l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la loi de composition interne définie par $a \wedge b = c$, où c est le plus grand commun diviseur des entiers a et b.

Est-ce-que tout élément de $\mathbb{N}^*$ est régulier dans $(\mathbb{N}^*;\wedge)$? Justifier.

III- Morphismes

3-1/ Définition d'un morphisme

Définition 8

Soit $(E;*)$ et $(F;T)$ deux ensembles munis de lois de composition interne, et soit f une application de E dans F.

On dit que f est un morphisme de $(E;*)$ dans $(F;T)$ lorsque :

$$\left(\forall (x;y) \in E^2\right) f(x * y) = f(x) T f(y)$$

Définition 9

Un morphisme s'appelle aussi un homomorphisme.

Un endomorphisme de $(E;*)$ est un morphisme de $(E;*)$ dans lui-même.

Un isomorphisme est un morphisme bijectif.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Applications

Soit f_a l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) f_a(x;y) = \left(ax; \frac{y}{a}\right)$ (où $a \in \mathbb{R}^*$)

1. Montrer que f_a est une application bijective.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications f_a quand a varie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Déterminer l'application $f_{a'} \circ f_a$ où $(a;a') \in (\mathbb{R}^*)^2$.
3. En déduire que la composition des applications $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{F}$.

On considère l'application :

$$h : \mathbb{R}^* \to \mathscr{F}$$
$$a \mapsto f_a$$

4. Montrer que h est un morphisme de $(\mathbb{R}^*;\times)$ dans $(\mathscr{F};\circ)$.

3-2/ Propriétés d'un morphisme

Proposition 4

Soit f un morphisme de $(E;*)$ dans $(F;T)$.

1- $f(E)$ est une partie stable de $(F;T)$.

2- Si la loi * est associative dans $(E;*)$, alors la loi T est associative dans $(f(E);T)$.

3- Si la loi * est commutative dans $(E;*)$, alors la loi T est commutative dans $(f(E);T)$.

4- Si la loi * admet un élément neutre e dans $(E;*)$, alors $f(e)$ est un élément neutre dans $(f(E);T)$.

5- Si la loi * admet un élément neutre e dans $(E;*)$, et un élément x admet un symétrique x' dans $(E;*)$, alors $f(x)$ admet un symétrique dans $(f(E);T)$ qui est $f(x')$.

Corollaire

Si f est un isomorphisme de $(E;*)$ dans $(F;T)$ (c'est-à-dire morphisme bijectif), alors f transfère les propriétés de la loi * dans $(E;*)$ vers la loi T de $(F;T)$, et va ainsi conserver toutes les propriétés liées à cette loi.

On exprime ce résultat en disant que $(E;*)$ et $(F;T)$ ont la même structure.