Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 9-3 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ - Problème de synthèse

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

VII- Problème de synthèse

7-1/ Partie 1

On considère dans $\mathbb{N}^3$ l'équation : $(E)\ :\ x^2+y^2=z^2$

1. Vérifier que $(0;0;0)$, $(3;4;5)$ et $(5;12;13)$ sont solutions de l'équation (E).

Soit $(u;v)\in\mathbb{N}^2$ tel que $u<v$

2. Montrer que $\left(u^2-v^2;2uv;u^2+v^2\right)$ est une solution de l'équation (E).
3. Montrer que si $(x;y;z)$ est solution de (E) alors $(nx;ny;nz)$ est aussi solution de (E) où $n\in\mathbb{N}$.

7-2/ Partie 2

Dans cette partie, on veut résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $(\mathbb{N}^*)^3$.

Soit $(x;y;z)$ une solution de l'équation (E).

On pose : $x\wedge y\wedge z=d$

1. Montrer qu'on peut restreindre l'étude à $d=1$.

Dans tout ce qui suit, $(x;y;z)$ est une solution de (E) telle que : $x\wedge y\wedge z=1$

2. Montrer que : $x\wedge y=y\wedge z=z\wedge x=1$
3. Montrer que x et y ont des parités distinctes et que le nombre z est impair.

On suppose dans ce qui suit que z et x sont impairs, y est pair et on pose :
$\delta=(z-x)\wedge(z+x)$

4. Montrer que si $c^2=ab$ et $a\wedge b=1$, alors :

$$\left(\exists\,(\alpha;\beta)\in\mathbb{N}^2\right)\ \left[a=\alpha^2\ et\ b=\beta^2\ et\ \alpha\wedge\beta=1\right]$$

5. a- Montrer que : $\delta=2$

5. b- En déduire qu'il existe $(u;v) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $\begin{cases} z+x=2u^2 \\ z-x=2v^2 \\ u \wedge v = 1 \end{cases}$ puis que $y=2uv$

5. c- En déduire que : $\big(x;y;z\big) = \big(u^2-v^2; 2uv; u^2+v^2\big)$

6. Donner les solutions de l'équation (E).