Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 9-1-2 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ - Partie 1 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

III- Exercices I

3-1/ Exercice 1-1

3-2/ Exercice 1-2

3-3/ Exercice 1-3

3-4/ Exercice 1-4

III- Exercices I

3-1/ Exercice 1-1

Les questions suivantes sont indépendantes.

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.

1. Montrer que : $p \equiv 1 \ [4]$ ou $p \equiv 3 \ [4]$

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

2. Montrer que : $p^2 + 11 \equiv 0 \ [12]$
3. Montrer que la somme de trois entiers naturels impairs consécutifs n'est pas un nombre premier.
4. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Le nombre $a^4 + a^2 + 1$ est-il premier ?
5. Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls. Montrer que si $ab = cd$ alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ n'est pas premier.
6. Soit $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x > 1$ et $y > 1$. Montrer que $N = a^4 + 4b^4$ n'est pas premier.
7. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $n^4 + 4$ est premier.
8. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^2 - y^2 = p$

3-2/ Exercice 1-2

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

On pose : $a = 257$ et $b = 45$

1. a- En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer $a \wedge b$.

1. b- En déduire qu'il existe un couple $(\alpha;\beta)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $\alpha a+\beta b=a\wedge b$ (α et β à déterminer).
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer $137\wedge 726$, puis déterminer $(x_0;y_0)\in\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$726x_0+137y_0=1$$

3-3/ Exercice 1-3

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left(n^2+4n+1\right)\wedge(n+4)=1$$

2. Développer $\left(n^2+1\right)^2$ et $\left(n^2+1\right)^3$.
3. En déduire, à l'aide de théorème de Bezout, que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\left(n^4+2n^2+1\right)\wedge\left(n^4+3n^2+3\right)=1$$

3-4/ Exercice 1-4

1. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n\leq 3*10^3$ et :

$$n\equiv 5\ [139] \text{ et } n\equiv 5\ [140]$$