Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 9-2-1 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IV- L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

4-1/ Classes d'équivalence

Définition 7

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n est appelé la classe d'équivalence de r, et on la note $\bar{r}$.

C'est la classe d'équivalence de r modulo n dans $\mathbb{Z}$.

Généralisation : Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

La classe d'équivalence de a modulo n est l'ensemble défini par :

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z}/x \equiv a \ [n]\} = \{a + kn/k \in \mathbb{Z}\}$$

Applications

Déterminer la classe d'équivalence modulo 12 de chacun des nombres :

$$116 \ ; \ 1979 \ ; \ 2018$$

Proposition 8

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on désigne par $\bar{x}$ la classe d'équivalence de x modulo n. Alors:

1) $(\forall a \in \mathbb{Z})\,(\exists! r \in \{0;1;\ldots;n-1\})\ \bar{a} = \bar{r}$

2) Si $0 \leq r < n$ et $0 \leq r' < n$ alors : $\bar{r} = \overline{r'} \Leftrightarrow r = r'$ et $r \neq r' \Leftrightarrow \bar{r} \cap \overline{r'} = \emptyset$

3) $(\forall x \in \mathbb{Z})\,(\exists! r \in \{0;1;\ldots;n-1\})\ x \in \bar{r}$ (r étant le reste de la division euclidienne de x par n)

4) $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \ldots \cup \overline{n-1}$

5) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\ldots;\overline{n-1}\right\}$

4-2/ Opérations dans l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition 8

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

On définit l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : Pour tous $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$

On définit la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : Pour tous $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y}$

Applications

Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$1\ \ \bar{4}x = \bar{2}$$
$$2\ \ \bar{3}x^2 + x + \bar{1} = \bar{0}$$

Théorème 17

Soit p un nombre premier positif. Alors :

1) $\left(\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \left\{\bar{0}\right\}\right)\left(\exists \bar{y} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \left\{\bar{0}\right\}\right)\bar{x} \times \bar{y} = \bar{1}$

2) $\left(\forall\,(\bar{x};\bar{y}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2\right)\ \left[\bar{x} \times \bar{y} = \bar{0} \Leftrightarrow \left(\bar{x} = \bar{0}\ ou\ \bar{y} = \bar{0}\right)\right]$

V- Systèmes de numération

5-1/ Représentation d'un entier naturel dans un système de numération

Définition 9

La base b d'un système de numération représente le nombre d'unités d'un certain rang, nécessaire pour former une unité de rang immédiatement supérieur.

L'ensemble $B_b = \{0;1;\ldots;b-1\}$, soit b caractères (chiffres en base 10) quantifie le nombre d'unités d'un rang quelconque.

Théorème 18

Soit b un entier supérieur ou égal à 2.

Tout entier naturel non nul n peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sont des entiers tels que $a_m \neq 0$ et $0 \leq a_i \leq b - 1$ pour tout $i \in \{0; 1; 2; \ldots; m\}$

On écrit : $n = \overline{a_m a_{m-1} \ldots . a_1 a_0}_{(b)}$, et on dit qu'on a représenté le nombre n dans le système de numération de base b.

Applications

1. Convertir en binaire les nombres suivants :

$$97 \; ; \; 397 \; ; \; 133$$

2. Convertir en numération décimale les nombres dont l'écriture en binaire est :

$$\overline{101}_{(2)} \; ; \; \overline{1101110}_{(2)}$$

5-2- Comparaison de deux nombres présentés dans le même système de numération

Théorème 19

Soit x et y deux entiers naturels représentés dans le même système de numération par :

$$x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots . a_1 a_0}_{(b)} \text{ et } y = \overline{c_m c_{m-1} \ldots . c_1 c_0}_{(b)}$$

1) Si $m > n$ alors $y > x$

2) Si $m = n$ et $c_n = a_n$ et $c_{n-1} = a_{n-1}$ et ... et $c_{i+1} = a_{i+1}$ et $c_i \neq a_i$, alors, l'ordre de x et y est celui de c_i et a_i. En particulier, si $c_i > a_i$ alors $y > x$

5-3/ Addition et multiplication de deux nombres présentés dans le même système de numération

1) On considère les deux nombres suivants : $x = \overline{5312}_{(6)}$ et $x = \overline{214}_{(6)}$

On veut représenter le nombre $x + y$ en base 6.

On a : $x = 5 \times \; 6^3 + 3 \times \; 6^2 + 6 + 2$ et $y = 2 \times 6^2 + 6 + 4$

Par conséquent: $x + y = 5 \times \; 6^3 + 5 \times \; 6^2 + 3 \times 6 + 2 = \overline{5530}_{(6)}$

On peut représenter le nombre $x + y$ directement en base 6 en utilisant la méthode vue au primaire « l'addition par retenue » comme suit :

$$\begin{array}{r} \overline{1} \\ \overline{5312}_{(6)} \\ + \\ \overline{214}_{(6)} \\ \hline = \overline{5530}_{(6)} \end{array}$$

2) On considère les deux nombres suivants : $a = \overline{432}_{(5)}$ et $b = \overline{134}_{(5)}$

On veut représenter le nombre $a \times b$ en base 5.

On a : $a = 4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2$ et $b = 5^2 + 3 \times 5 + 4$

Par conséquent :

$$a \times b = \left(4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2\right)\left(5^2 + 3 \times 5 + 4\right)$$
$$a \times b = 5^5 + 3 \times 5^4 + 5^3 + 4 \times 5 + 3$$
$$a \times b = \overline{131043}_{(5)}$$

Tout comme l'addition, on peut représenter le nombre $a \times b$ directement dans en base 5 en utilisant la méthode de « la multiplication par retenue » comme suit :

$$\begin{array}{r r}
 & \overset{1}{} \\
 & \overline{432}_{(5)} \\
\times & \overline{134}_{(5)} \\
\hline
 & 3333 \\
+ & 2401\bullet \\
+ & 432\bullet\bullet \\
\hline
= & \overline{131043}_{(5)}
\end{array}$$

5-4/ Critères de divisibilité sur les nombres 3;4;5;9;11;25 dans le système décimal

Proposition 9

Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que

$x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots . a_1 a_0}_{(10)} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_1 . 10 + a_0$ avec :

$a_n \neq 0$ et $0 \leq a_i \leq 10$ pour tout $i \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$1 \;\; x \equiv 0 \;\; [5] \Leftrightarrow (a_0 = 0 \; ou \; a_0 = 5)$$
$$2 \;\; x \equiv 0 \;\; [25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0 \;\; [25]$$
$$3 \;\; x \equiv 0 \;\; [4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0 \;\; [4]$$
$$4 \;\; x \equiv 0 \;\; [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0 \;\; [3]$$
$$5 \;\; x \equiv 0 \;\; [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0 \;\; [9]$$
$$6 \;\; x \equiv 0 \;\; [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0 \;\; [11]$$