

Sommaire

IV- L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

4-1/ Classes d'équivalence

4-2/ Opérations dans l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

V- Systèmes de numération

5-1/ Représentation d'un entier naturel dans un système de numération

5-2- Comparaison de deux nombres présentés dans le même système de numération

5-3/ Addition et multiplication de deux nombres présentés dans le même système de numération

5-4/ Critères de divisibilité sur les nombres 3;4;5;9;11;25 dans le système décimal

IV- L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

4-1/ Classes d'équivalence

Définition 7

Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n est appelé la classe d'équivalence de r , et on la note \bar{r} .

C'est la classe d'équivalence de r modulo n dans \mathbb{Z} .

Généralisation : Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

La classe d'équivalence de a modulo n est l'ensemble défini par :

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z}/x \equiv a [n]\} = \{a + kn/k \in \mathbb{Z}\}$$

Applications

Déterminer la classe d'équivalence modulo 12 de chacun des nombres :

116 ; 1979 ; 2018

Proposition 8

Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on désigne par \bar{x} la classe d'équivalence de x modulo n . Alors:

- 1) $(\forall a \in \mathbb{Z}) (\exists! r \in \{0; 1; \dots; n-1\}) \bar{a} = \bar{r}$
- 2) Si $0 \leq r < n$ et $0 \leq r' < n$ alors : $\bar{r} = \bar{r'} \Leftrightarrow r = r'$ et $r \neq r' \Leftrightarrow \bar{r} \cap \bar{r'} = \emptyset$
- 3) $(\forall x \in \mathbb{Z}) (\exists! r \in \{0; 1; \dots; n-1\}) x \in \bar{r}$ (r étant le reste de la division euclidienne de x par n)
- 4) $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \dots \cup \overline{n-1}$
- 5) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \dots; \overline{n-1}\}$

4-2/ Opérations dans l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition 8

Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

On définit l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : Pour tous \bar{x} et \bar{y} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$

On définit la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : Pour tous \bar{x} et \bar{y} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
 $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y}$

Applications

Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad \bar{4}x &= \bar{2} \\ 2 \quad \bar{3}x^2 + x + \bar{1} &= \bar{0} \end{aligned}$$

Théorème 17

Soit p un nombre premier positif. Alors :

- 1) $(\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}) (\exists \bar{y} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}) \bar{x} \times \bar{y} = \bar{1}$
- 2) $(\forall (\bar{x}; \bar{y}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2) [\bar{x} \times \bar{y} = \bar{0} \Leftrightarrow (\bar{x} = \bar{0} \text{ ou } \bar{y} = \bar{0})]$

V- Systèmes de numération

5-1/ Représentation d'un entier naturel dans un système de numération

Définition 9

La base b d'un système de numération représente le nombre d'unités d'un certain rang, nécessaire pour former une unité de rang immédiatement supérieur.

L'ensemble $B_b = \{0; 1; \dots; b-1\}$, soit b caractères (chiffres en base 10) quantifie le nombre d'unités d'un rang quelconque.

Théorème 18

Soit b un entier supérieur ou égal à 2.

Tout entier naturel non nul n peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

où a_0, a_1, \dots, a_m sont des entiers tels que $a_m \neq 0$ et $0 \leq a_i \leq b - 1$ pour tout $i \in \{0; 1; 2; \dots; m\}$

On écrit : $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}_{(b)}$, et on dit qu'on a représenté le nombre n dans le système de numération de base b .

Applications

1. Convertir en binaire les nombres suivants :

$$97 ; 397 ; 133$$

2. Convertir en numération décimale les nombres dont l'écriture en binaire est :

$$\overline{101}_{(2)} ; \overline{1101110}_{(2)}$$

5-2- Comparaison de deux nombres présentés dans le même système de numération

Théorème 19

Soit x et y deux entiers naturels représentés dans le même système de numération par :

$$x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{(b)} \text{ et } y = \overline{c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0}_{(b)}$$

- 1) Si $m > n$ alors $y > x$
- 2) Si $m = n$ et $c_n = a_n$ et $c_{n-1} = a_{n-1}$ et ... et $c_{i+1} = a_{i+1}$ et $c_i \neq a_i$, alors, l'ordre de x et y est celui de c_i et a_i . En particulier, si $c_i > a_i$ alors $y > x$

5-3/ Addition et multiplication de deux nombres présentés dans le même système de numération

- 1) On considère les deux nombres suivants : $x = \overline{5312}_{(6)}$ et $y = \overline{214}_{(6)}$

On veut représenter le nombre $x + y$ en base 6.

$$\text{On a : } x = 5 \times 6^3 + 3 \times 6^2 + 6 + 2 \text{ et } y = 2 \times 6^2 + 6 + 4$$

$$\text{Par conséquent: } x + y = 5 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 3 \times 6 + 2 = \overline{5530}_{(6)}$$

On peut représenter le nombre $x + y$ directement en base 6 en utilisant la méthode vue au primaire « l'addition par retenue » comme suit :

$$\begin{array}{r} \overline{5312}_{(6)} \\ + \overline{214}_{(6)} \\ \hline = \overline{5530}_{(6)} \end{array}$$

- 2) On considère les deux nombres suivants : $a = \overline{432}_{(5)}$ et $b = \overline{134}_{(5)}$

On veut représenter le nombre $a \times b$ en base 5.

$$\text{On a : } a = 4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2 \text{ et } b = 5^2 + 3 \times 5 + 4$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} a \times b &= (4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2) (5^2 + 3 \times 5 + 4) \\ a \times b &= 5^5 + 3 \times 5^4 + 5^3 + 4 \times 5 + 3 \\ a \times b &= \overline{131043}_{(5)} \end{aligned}$$

Tout comme l'addition, on peut représenter le nombre $a \times b$ directement dans en base 5 en utilisant la méthode de « la multiplication par retenue » comme suit :

$$\begin{array}{r}
 \overline{432}_{(5)} \\
 \times \overline{134}_{(5)} \\
 \hline
 3333 \\
 + 2401\bullet \\
 + 432\bullet\bullet \\
 \hline
 = \overline{131043}_{(5)}
 \end{array}$$

5-4/ Critères de divisibilité sur les nombres 3;4;5;9;11;25 dans le système décimal

Proposition 9

Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{(10)} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ avec : $a_n \neq 0$ et $0 \leq a_i \leq 10$ pour tout $i \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$.

On a alors les équivalences suivantes :

- 1 $x \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow (a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 5)$
- 2 $x \equiv 0 \pmod{25} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0 \pmod{25}$
- 3 $x \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0 \pmod{4}$
- 4 $x \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 \pmod{3}$
- 5 $x \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 \pmod{9}$
- 6 $x \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \equiv 0 \pmod{11}$