

Sommaire**I- Généralités sur les fonctions numériques**

1-1/ Fonction numérique d'une variable numérique

1-2/ Représentation graphique (ou courbe représentative) d'une fonction numérique

1-3/ Égalité de deux fonctions

**II- Fonction paire – fonction impaire**

2-1/ Fonction paire

2-2/ Fonction impaire

**III- Sens de variation d'une fonction****IV- Taux d'accroissement d'une fonction****V- Extremums d'une fonction****VI- Étude de certaines fonctions**6-1/ Fonction  $f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ )6-2/ Fonction  $f(x) = \frac{a}{x}$  ( $a \neq 0$ )6-3/ Fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )6-4/ Fonction  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad - bc \neq 0$ )**VII- Exercices**

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

**I- Généralités sur les fonctions numériques**

1-1/ Fonction numérique d'une variable numérique

## Vocabulaire

La relation qui nous permet de lier chaque élément  $x \in \mathbb{R}$  par un seul élément  $y \in \mathbb{R}$  est appelée fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

On la note par  $f$  ou  $g$  ou  $h$  ...

- $y = f(x)$  est l'image de  $x$  par  $f$ .
- $x$  est un antécédent de  $y$  par  $f$ .

Si l'image de  $x$  existe, on dit que la fonction  $f$  est définie en  $x$ .

Tous les réels  $x$  qui ont des images par la fonction  $f$  constituent un ensemble appelé ensemble de définition ou domaine de définition, on le note par  $D$  ou  $D_f$ .

## 1-2/ Représentation graphique (ou courbe représentative) d'une fonction numérique

### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  ( $D_f \subset \mathbb{R}$ )

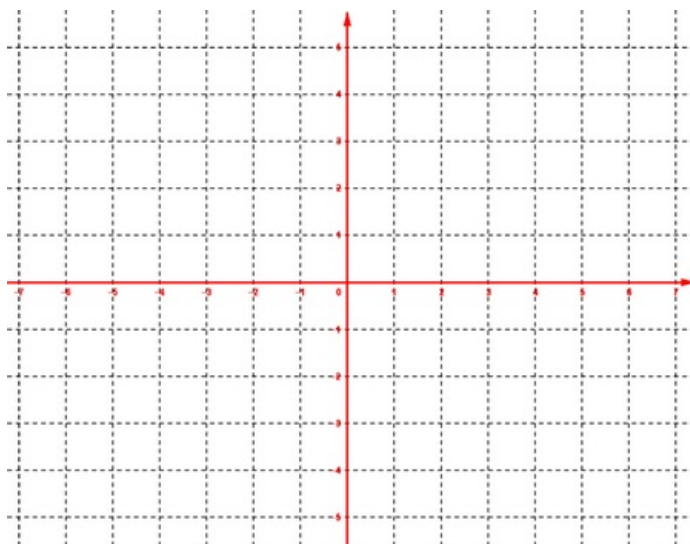
Le plan ( $P$ ) est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On appelle courbe représentative de la fonction  $f$ , notée  $(C_f)$  ou  $\mathcal{C}_f$ , l'ensemble des points  $M$  de ( $P$ )

de coordonnées  $(x, f(x))$  où  $x \in D_f$ .

Un point  $M(x, y) \in (C_f)$  équivaut à  $x \in D_f$  et  $y = f(x)$ .

La relation  $y = f(x)$  s'appelle équation cartésienne de la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



## 1-3/ Égalité de deux fonctions

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$ .

On dit que les deux fonctions  $f$  et  $g$  sont égales si et seulement si :

- $D_f = D_g$
- Pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :  $f(x) = g(x)$

Dans ce cas on écrit :  $f = g$

### Remarque

Si  $f = g$ , alors les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  de  $f$  et  $g$  sont confondues.

## II- Fonction paire – fonction impaire

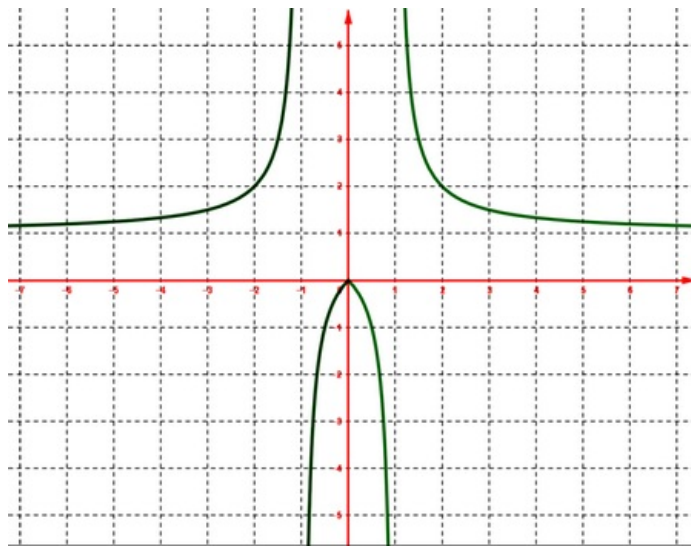
### 2-1/ Fonction paire

#### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

On dit que  $f$  est une fonction paire sur  $D_f$  si et seulement si pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :

- $-x$  est aussi un élément de  $D_f$ .
- $f(-x) = f(x)$  (c.à.d.  $-x$  et  $x$  ont la même image).



### Remarque

La courbe d'une fonction  $f$  paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Si la fonction  $f$  est paire sur  $D_f$ , il suffit de connaître la partie de la courbe  $(C_f)$  tel que les abscisses sont positives, ces abscisses constituent une partie de  $\mathbb{R}^+$  appelée domaine d'étude de la fonction  $f$ , notée  $D_E$ .

On a :  $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$

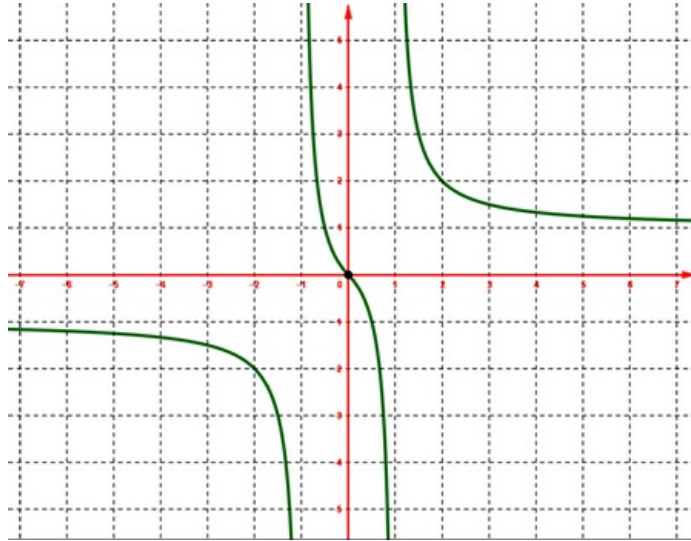
### 2-2/ Fonction impaire

#### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

On dit que  $f$  est une fonction impaire sur  $D_f$  si et seulement si pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :

- $-x$  est aussi un élément de  $D_f$ .
- $f(-x) = -f(x)$  (c.à.d.  $-x$  et  $x$  ont des images opposées)



### Remarque

La courbe d'une fonction  $f$  impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Si la fonction  $f$  est impaire sur  $D_f$ , il suffit de connaître la partie de la courbe  $(C_f)$  tel que les abscisses sont positives, ces abscisses constituent une partie de  $\mathbb{R}^+$  appelée domaine d'étude de la fonction  $f$ , notée  $D_E$ .

On a :  $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$

## III- Sens de variation d'une fonction

### Définitions

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

$I$  est un intervalle inclus dans  $D_f$ .

On dit que  $f$  est une fonction croissante sur l'intervalle  $I$  si et seulement si pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a  $x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$  (le sens de l'inégalité ne change pas).

On dit que  $f$  est une fonction strictement croissante sur l'intervalle  $I$  si et seulement si pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a  $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$  (le sens de l'inégalité ne change pas).

On dit que  $f$  est une fonction décroissante sur l'intervalle  $I$  si et seulement si pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a  $x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$  (le sens de l'inégalité change).

On dit que  $f$  est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle  $I$  si et seulement si pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a  $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$  (le sens de l'inégalité change).

On dit que  $f$  est une fonction constante sur l'intervalle  $I$  si et seulement si pour tous  $x$  et  $x'$  de  $I$  on a  $f(x) = f(x')$ .

### Remarque

Si la fonction  $f$  est croissante ou bien décroissante sur l'intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est monotone sur  $I$ .

Si la fonction  $f$  est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur l'intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .

Déterminer les variations d'une fonction c'est de rechercher les intervalles sur lesquelles la fonction  $f$  est strictement monotone ou constante.

On résume l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et les variations de la fonction  $f$  par un tableau appelé tableau de variation de  $f$ .

Ensemble de définition →	$x$	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $f$ →	$f(x)$	↗	

## IV- Taux d'accroissement d'une fonction

### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

$I$  est un intervalle inclus dans  $D_f$ .

Soient  $x$  et  $x'$  de  $I$  tel que  $x \neq x'$ , le nombre  $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$  est appelé le taux d'accroissement de la fonction  $f$  entre  $x$  et  $x'$ , on note  $T_f$ , d'où  $T_f = \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$

### Propriété

$T_f$  est le taux d'accroissement de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ .

- Si  $T_f > 0$  alors la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $I$ .
- Si  $T_f < 0$  alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $I$ .
- Si  $T_f = 0$  alors la fonction  $f$  est constante sur l'intervalle  $I$ .

## V- Extremums d'une fonction

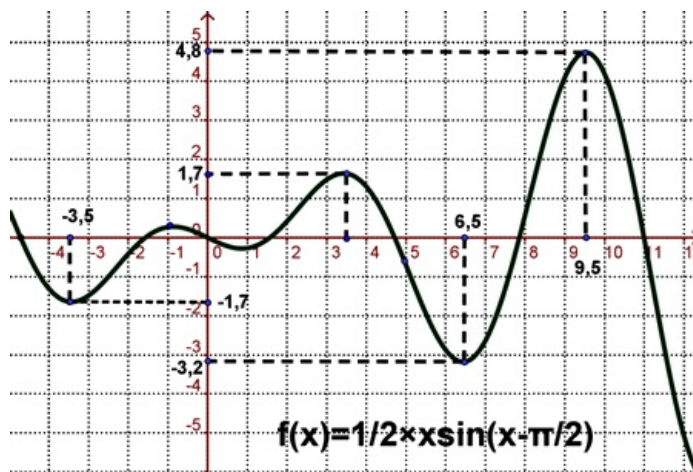
### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

$I$  est un intervalle inclus dans  $D_f$ , et  $a \in I$ .

$f(a)$  est une valeur maximale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  équivaut à  $f(x) \leq f(a)$ .

$f(a)$  est une valeur minimale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  équivaut à  $f(x) \geq f(a)$ .

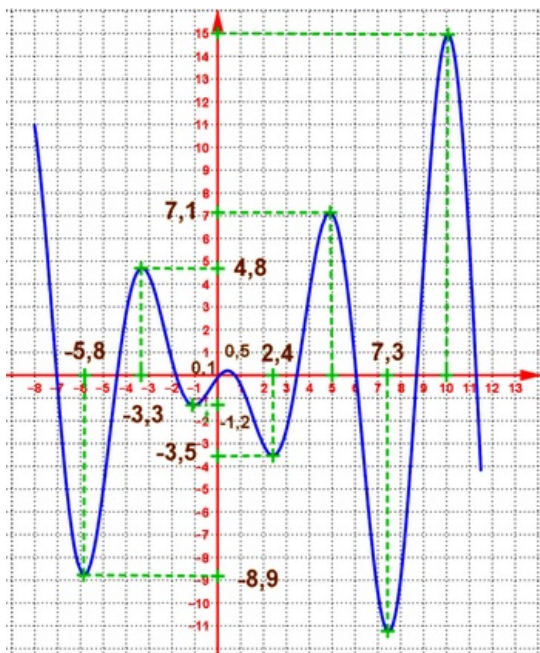


### Remarque

$f(a)$  est un extremum de la fonction  $f$  signifie que  $f(a)$  est une valeur maximale ou bien est une valeur minimale de  $f$ .

Si  $f(a)$  est une valeur maximale de la fonction  $f$  sur  $D_f$  on dit que  $f(a)$  est une valeur maximale absolue de  $f$  (sinon on dit que  $f(a)$  est une valeur maximale relative).

Si  $f(a)$  est une valeur minimale de la fonction  $f$  sur  $D_f$  on dit que  $f(a)$  est une valeur minimale absolue de  $f$  (sinon on dit que  $f(a)$  est une valeur minimale relative).



## VI- Étude de certaines fonctions

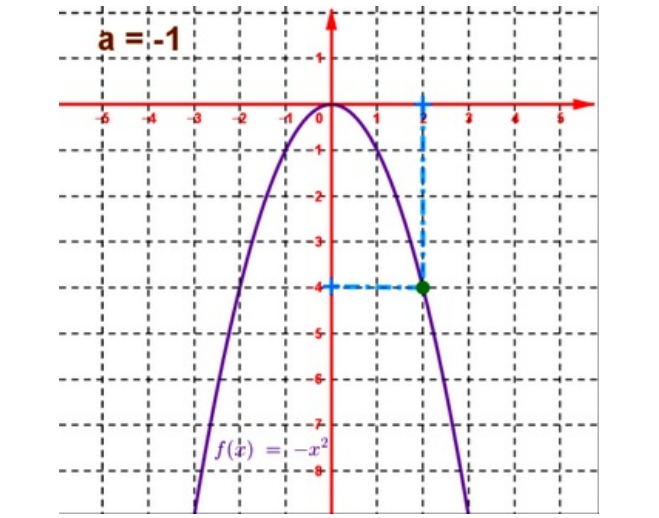
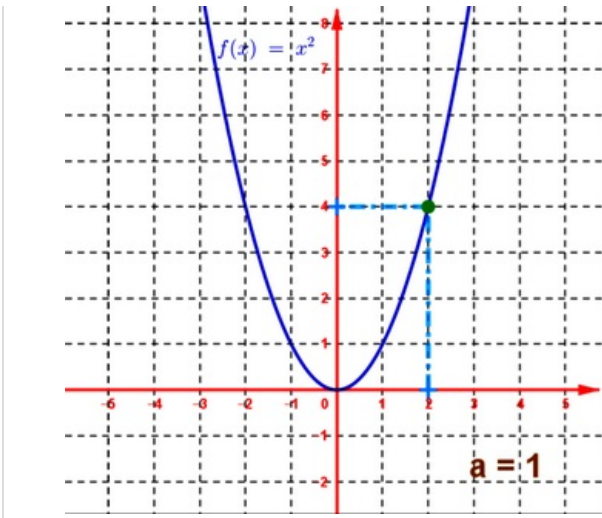
### 6-1/ Fonction $f(x) = ax^2$ ( $a \neq 0$ )

#### Propriété

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ )

La fonction  $f$  est paire sur  $D_f = \mathbb{R}$ .

1er cas : $a > 0$		2ème cas : $a < 0$																									
Monotonie de la fonction $f$																											
La fonction $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$		La fonction $f$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $] -\infty, 0]$																									
Tableau de variation de la fonction $f$																											
$a > 0$	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 10%;"><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border: none;"></td> <td colspan="2" style="text-align: center;">↘</td> <td style="text-align: center;">↗</td> </tr> <tr> <td style="border: none;"><math>f</math></td> <td colspan="2" style="text-align: center;">0</td> <td></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$		↘		↗	$f$	0			$a < 0$	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 10%;"><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border: none;"></td> <td colspan="2" style="text-align: center;">↗</td> <td style="text-align: center;">↘</td> </tr> <tr> <td style="border: none;"><math>f</math></td> <td colspan="2" style="text-align: center;">0</td> <td></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$		↗		↘	$f$	0		
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$																								
	↘		↗																								
$f$	0																										
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$																								
	↗		↘																								
$f$	0																										
Courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$																											



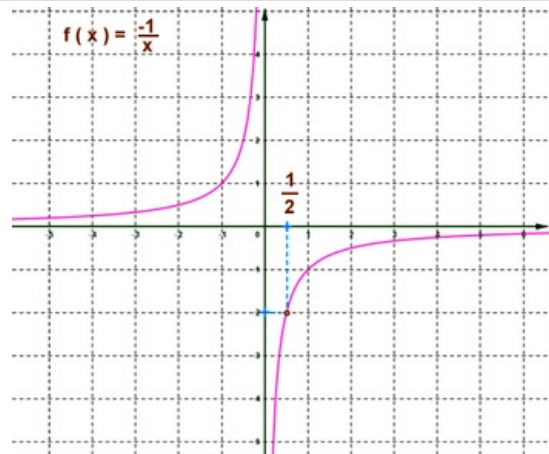
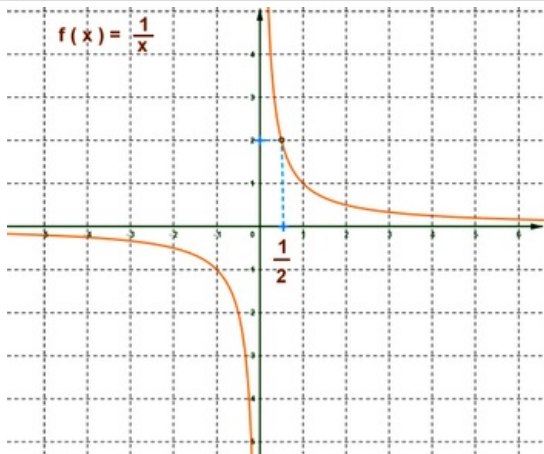
La courbe représentative de la fonction  $f$  est appelée parabole, de sommet l'origine  $O$  du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , d'axe de symétrie l'axe des ordonnées (la droite d'équation  $x = 0$ ).

### 6-2/ Fonction $f(x) = \frac{a}{x}$ ( $a \neq 0$ )

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \frac{a}{x}$  ( $a \neq 0$ )

La fonction  $f$  est impaire sur  $D_f = \mathbb{R}^*$ .

1er cas : $a > 0$	2ème cas : $a < 0$																		
Monotonie de la fonction $f$																			
La fonction $f$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$	La fonction $f$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$																		
Tableau de variation de la fonction $f$																			
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td rowspan="2" style="padding: 5px;"><math>\Delta &gt; 0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↘</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">  </td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↘</td> </tr> </table>	$\Delta > 0$	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$f$	↘		↘	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td rowspan="2" style="padding: 5px;"><math>\Delta &lt; 0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↗</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">  </td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↗</td> </tr> </table>	$\Delta < 0$	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$f$	↗		↗
$\Delta > 0$		$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$														
	$f$	↘		↘															
$\Delta < 0$	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$															
	$f$	↗		↗															
Courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$																			



La courbe représentative de la fonction  $f$  est appelée hyperbole de centre de symétrie l'origine  $O$ , d'asymptote horizontale l'axe des abscisses (la droite d'équation  $y = 0$ ), et d'asymptote verticale l'axe des ordonnées (la droite d'équation  $x = 0$ ).

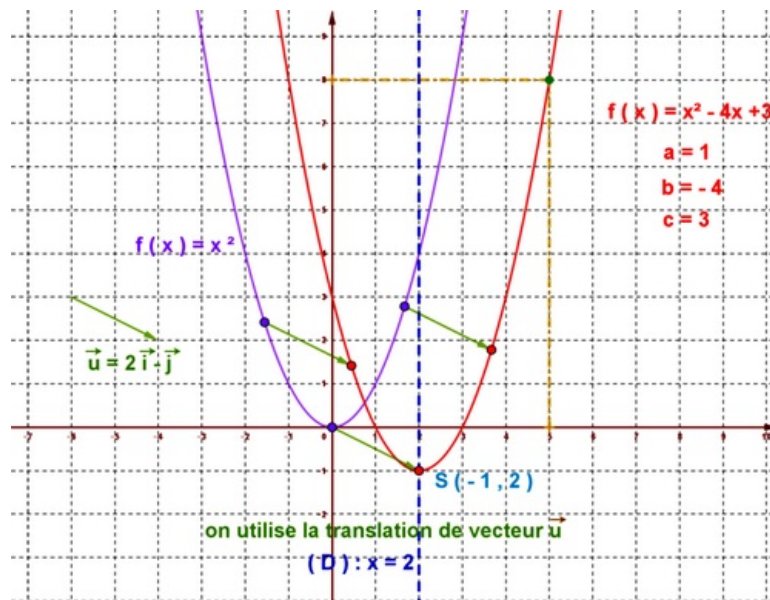
### 6-3/ Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0$ )

Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

La fonction  $f$  s'écrit de la forme  $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

La courbe représentative de la fonction  $f$  est une parabole, de sommet le point  $S(-\alpha, \beta)$ , d'axe de symétrie la droite d'équation  $x = -\alpha$ .

La courbe représentative de la fonction  $f$  est obtenue en utilisant la translation du vecteur  $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$  de la courbe  $f(x) = ax^2$ .



### 6-4/ Fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ( $ad - bc \neq 0$ )

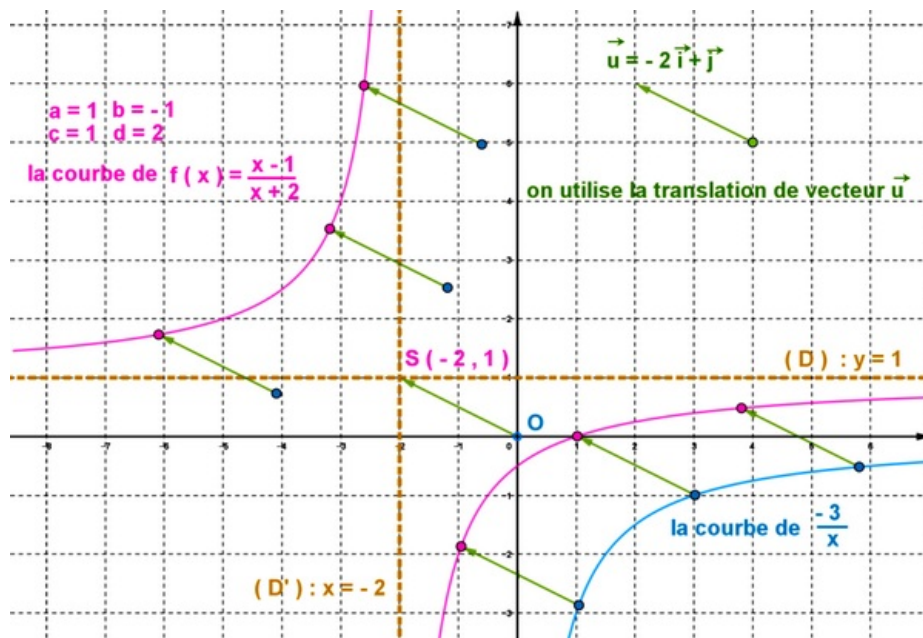
Soit  $f$  une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad - bc \neq 0$ )

La fonction  $f$  s'écrit de la forme  $f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$  avec  $k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $x \neq -\alpha$

La courbe représentative de la fonction  $f$  est une hyperbole, de centre de symétrie le point  $S(-\alpha, \beta)$ , d'asymptote horizontale la droite d'équation  $y = \beta$ , et d'asymptote verticale la droite d'équation  $x = -\alpha$ .

La courbe représentative de la fonction  $f$  est obtenue en utilisant la translation du vecteur  $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$  de la courbe  $f(x) = \frac{k}{x}$ .





## VII- Exercices

### 7-1/ Exercice 1

Soit  $f$  une fonction numérique définie par  $f(x) = 2x^2 - 3$

- Déterminer les images des nombres suivants  $1$  ;  $-1$  ;  $\frac{1}{2}$  ;  $\sqrt{5}$  ;  $-2$  par la fonction  $f$ .
- Déterminer l'ensemble de définition de fonctions suivantes :

1  $f_1(x) = x^3 + 12x - 5$

2  $f_2(x) = \frac{-2x+4}{5x+3}$

3  $f_3(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2+2x-4}$

4  $f_4(x) = \frac{4x^2-5}{\sqrt{2x^2+2x-4}}$

5  $f_5(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{|x+2|-3}$

6  $f_6(x) = \sqrt{\frac{2-x}{4x+2}}$

7  $f_7(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{4x+2}}$

8  $f_8(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)-1}$

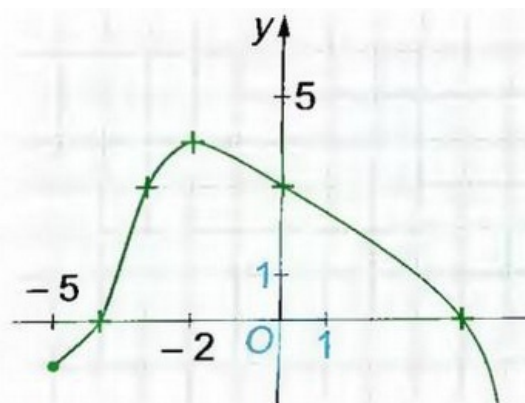
- Comparer les fonctions suivantes :

1  $f_1(x) = x$  et  $g_1(x) = \frac{x^2}{x}$

2  $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$  et  $g_2(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-4}$

### 7-2/ Exercice 2

La figure suivante présente la courbe d'une fonction :



- Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .
- Déterminer les images des nombres suivants :  $-5$  ;  $-4$  ;  $-3$  ;  $-2$  ;  $0$  ;  $4$
- Déterminer les antécédents de  $5$  et  $3$ .
- Étudier la parité de fonctions suivantes :

$$1 \quad f_1 : x \mapsto |x| - \frac{1}{x^2}$$

$$2 \quad f_2 : x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$$

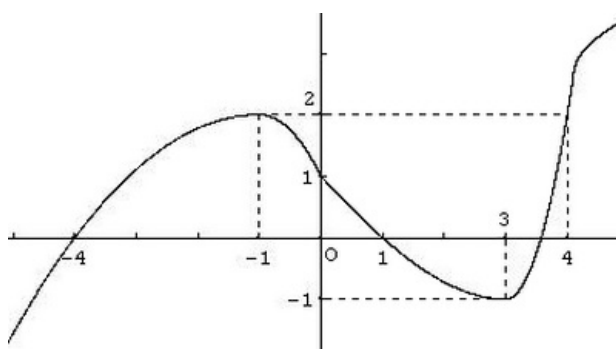
$$3 \quad f_3 : x \mapsto x^2 + x - 3$$

$$4 \quad f_4 : x \mapsto |x-1| - |x+1|$$

## 7-3/ Exercice 3

### Partie 1

La courbe  $(C_f)$  suivante est la courbe d'une fonction  $f$ , on précise de plus que  $f(3,5) = 0$ .



- Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Résoudre graphiquement les inéquations  $f(x) \geq 0$  et  $f(x) < 0$ .
- Résoudre graphiquement l'inéquation :  $f(x) > 2$

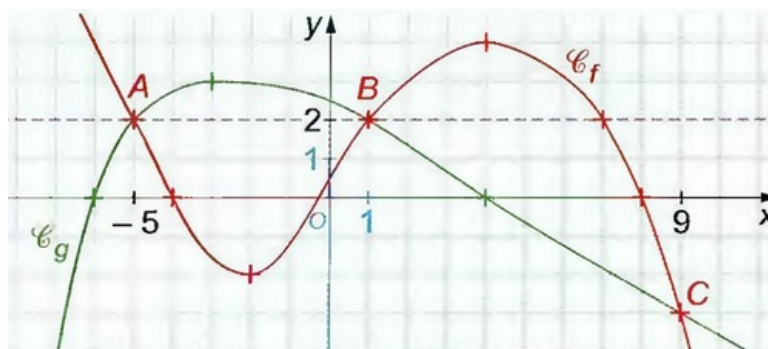
On considère les fonctions  $g$  et  $h$  définie par :  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  et  $h(x) = \frac{4x-5\sqrt{x}}{f(x)}$

- Donner  $D_g$  et  $D_h$ .

### Partie 2

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

Leurs représentations graphiques sont données dans le graphe suivant :



- Résoudre graphiquement ce qui suit :

$$g(x) = 2 ; f(x) = 7 ; f(x) = 2 ; g(x) < 2 ; f(x) \geq 2$$

$$g(x) = f(x) ; g(x) \geq f(x) ; g(x) < f(x) ; g(x) \geq 0$$

## 7-4/ Exercice 4

### Partie 1

Soit  $f$  une fonction numérique définie par :  $f(x) = x + \frac{4}{x}$

1. Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est impaire.
3. Montrer que si  $a$  et  $b$  sont deux nombres réel distincts non nuls, alors :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{ba-4}{ba}$$

4. Étudier les variations de  $f$  sur chacun des intervalles  $[2, +\infty[$  et  $]0, 2]$ .
5. En déduire les variations de  $f$  sur chacun des intervalles  $] -\infty, -2]$  et  $[-2, 0[$ .
6. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$ .

### Partie 2

Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = -x^2 + 2x$

1. Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Montrer que 1 est un maximum de  $f$  sur  $D_f$ .
3. Montrer que si  $a$  et  $b$  sont deux nombres réel distincts de  $D_f$ , alors :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2 - a - b$$

4. Étudier les variations de  $f$  sur chacun des intervalles  $[1, +\infty[$  et  $] -\infty, 1]$ .
5. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$ .

On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = -x^2 + 2|x|$

6. Déterminer  $D_g$  l'ensemble de définition de  $g$
7. Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$ , on a :  $g(x) = f(x)$
8. En déduire le tableau de variation de  $g$ .