

Sommaire

VII- Problème de synthèse

7-1/ Partie 1

7-2/ Partie 2

VII- Problème de synthèse

7-1/ Partie 1

On considère la fonction numérique  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

1. Calculer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
2. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x \geq x + 1$
3. Étudier les variations de la fonction  $f$ .

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

4. Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}$ .
5. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

7-3/ Partie 2

On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt & (x > 0) \\ F(0) = 2 \ln 2 \end{cases}$$

1. a- Vérifier que :  $\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \ln 2$
1. b- En utilisant le résultat de la question 2 de la partie 1, montrer que :  
 $(\forall t > 0) -t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$
2. a- Montrer que :  $(\forall x > 0) -3x^2 \leq F(x) - 2 \ln 2 \leq 0$
2. b- En déduire que la fonction  $F$  est continue et dérivable à droite en zéro.
3. a- Montrer que :  $(\forall t \geq 1) f(t) < e^{-t}$
3. b- En déduire la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
4. a- Montrer que  $F$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , puis calculer  $F'(x)$ .

4. b- Dresser le tableau des variations de  $F$ .

4. c- Construire  $\mathcal{C}_f$ , la courbe représentative de  $F$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $G$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln(t) dt$

5. Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x} \ln(4x) + e^{-x} \ln(x)$

6. Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x$

7. En déduire la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$