Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 7-2-1 : Calcul intégral - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IV- Intégration et ordre

4-1/ Positivité et croissance

4-2/ Intégrale et valeur absolue

4-3/ Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

V- Applications du calcul intégral

5-1/ Calcul des aires

5-2/ Calcul des volumes

5-3/ Encadrement d’une intégrale par deux suites (méthode des rectangles)

IV- Intégration et ordre

4-1/ Positivité et croissance

Proposition 6

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$ $(a<b)$.

Si f est positive sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Applications

1. Montrer que $0 \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}-1$ et $\frac{\pi}{3} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+t}{\cos t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2\pi^2}{9}+\frac{2\pi}{3}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $0 \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \frac{1}{x}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \cos(3x)\,\mathrm{d}x$

3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$
5. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

4-2/ Intégrale et valeur absolue

Proposition 7

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a;b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

On a alors : $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$

4-3/ Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Proposition 8

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a;b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$: $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq M(b-a)$$

S'il existe un réel M tels que pour tout $x \in [a;b]$: $|f(x)| \leq M$, alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq M(b-a)$$

Définition 1

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ $(a < b)$

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre réel

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Proposition 9

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ $(a < b)$.

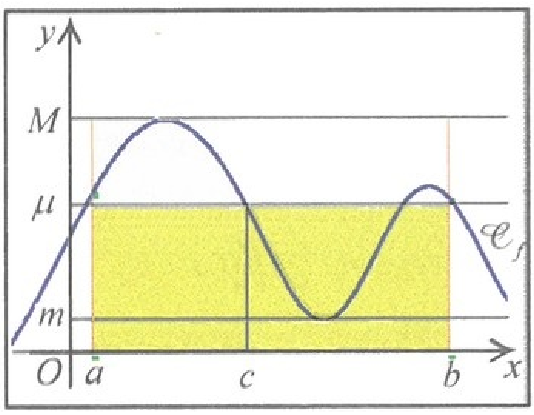
Il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = (b-a)f(c)$

Ce résultat porte le nom de « Théorème de la moyenne »

Remarques

Si $f([a;b]) = [m;M]$ et F désigne une primitive de la fonction f sur $[a;b]$, alors la formule $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = (b-a)f(c)$ est équivalente à $F(b) - F(A) = (b-a)F'(c)$, et cette formule n'est qu'une copie de la formule du théorème des accroissements finis appliquée à la fonction F.

Graphiquement, une interprétation de ce théorème est que l'aire algébrique sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est égale à celle d'un rectangle de base $[a;b]$, et de hauteur l'ordonnée d'un point moyen de la courbe.



V- Applications du calcul intégral

5-1/ Calcul des aires

Proposition 10

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ $(a<b)$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un
repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}\, x$ (en unité d'aire).

Proposition 11

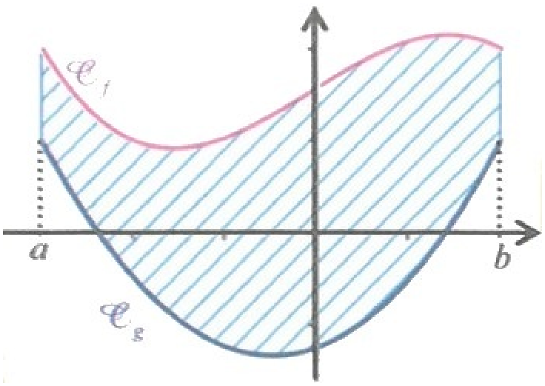
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$.

Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g.

Soit (Δ) le domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Alors : L'aire du domaine (Δ) en unités d'aire est donnée par :
$\sigma(\Delta)=\int_a^b |f(x)-g(x)| \, \mathrm{d}\, x$



5-2/ Calcul des volumes

Proposition 12

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$.

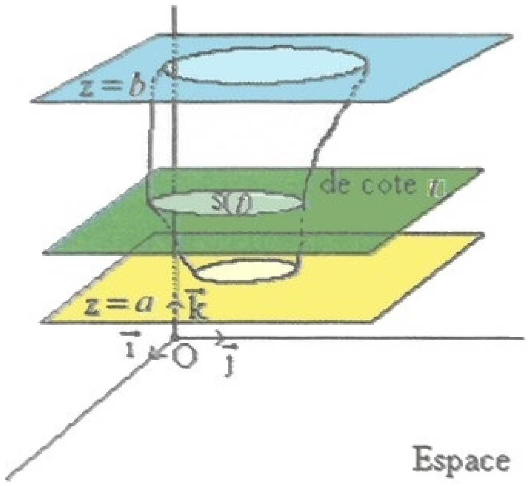
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a<b$.

On considère un solide (S) limité par deux plans parallèles au plan $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$:

- le plan de cote a d'équation $z=a$
- le plan de cote b d'équation $z=b$

Si $S\left(t\right)$ est l'aire de l'intersection du solide $\left(S\right)$ avec tout plan parallèle $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ de cote t, alors le volume de ce solide est (en unités de volume) :

$v\left(S\right)=\int_a^b S\left(t\right)\mathrm{d}\,t$

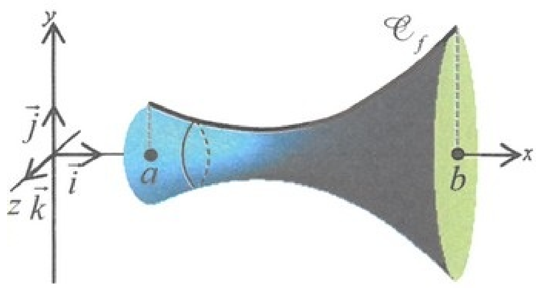


Proposition 13

L’espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]\ (a<b)$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}_f$ autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule : $V=\pi\int_a^b\left(f\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}\,x$ (en unités de volume)



Proposition 14

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a,b]\ (a<b)$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}_f$ autour de l'axe des ordonnées un tour complet est donné la formule : $V=\pi\left|\int_{\mathrm{f}(a)}^{\mathrm{f}(b)}\left(f^{-1}\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}\,x\right|$ (en unité de volume)

Si de plus, f est dérivable sur $[a,b]$ alors : $V = \pi \left| \int_a^b x^2 \left| f'(x) \right| \mathrm{d}x \right|$ (en unité de volume)

5-3/ Encadrement d'une intégrale par deux suites (méthode des rectangles)

Proposition 15

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$.

Pour tout entier $n \geq 2$ on pose :

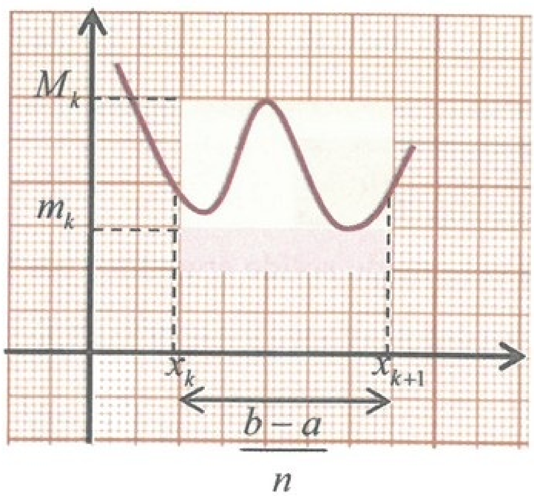
$$x_0 = a \; ; \; x_1 = a + \frac{b-a}{n} \; ; \; \ldots \; ; \; x_k = a + k\frac{b-a}{n} \; ; \; \ldots \; ; \; x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$$

Pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, on note M_k la valeur maximale et m_k la valeur minimale de f sur le segment $[x_k; x_{k+1}]$.

On pose enfin $\lambda_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M_k$ et $\mu_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_k$

On a alors pour tout entier $n \geq 2$:

$$\lambda_n \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \mu_n$$



Proposition 16

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Alors les deux suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ convergent et admettent $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme limite commune.

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Applications

Calculer la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}$$