

Sommaire

XI- Exercices I

11-1/ Exercice 2-1

11-2/ Exercice 2-2

11-3/ Exercice 2-3

11-4/ Exercice 2-4

XI- Exercices I

11-1/ Exercice 2-1

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) suivante :

$$(E) : \frac{1}{2}z^3 - (1+i)z^2 + 2(1+i)z - 4i = 0$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) .

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points :

$$A(1 + i\sqrt{3}) ; B(1 - i\sqrt{3}) ; C(2i)$$

3. Montrer que $OA = OB$.

Soit D le milieu du segment $[AC]$.

4. Déterminer l'affixe du point D et une mesure de l'angle $\left(\vec{u}; \widehat{OD}\right)$.

5. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Soit O' l'image de point O par la rotation R_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et B' l'image de point B par la rotation R_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

6. Déterminer les affixes des points O' et B' .

Soit I le milieu du segment $[OB]$.

7. Montrer que (AI) est une hauteur du triangle $AO'B'$.

11-2/ Exercice 2-2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$$

1. Vérifier que le nombre $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E) .
2. En déduire b la deuxième solution de (E) .
3. Montrer que $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$.
4. Écrire a sous forme trigonométrique.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Soit T le cercle de diamètre $[AB]$.

5. Déterminer ω l'affixe de Ω centre du cercle T .
6. Montrer que les points O et C appartiennent à T .
7. Montrer que le nombre $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

11-3/ Exercice 2-3

On considère dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

1. Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de (E) .
2. Déterminer a et b solutions de l'équation (E) (sachant que $b \in \mathbb{R}$).
3. Vérifier que $b = (1 - i\sqrt{3})a$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe a , et B le point d'affixe b .

4. Déterminer le nombre complexe b_1 , affixe du point B_1 , image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
5. Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.
6. Vérifier que $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

Soit C le point, d'affixe c , appartenant au cercle circonscrit du triangle OAB et différent de O et A .

7. Déterminer un argument du nombre $\frac{c}{c-a}$.

11-4/ Exercice 2-4

On considère dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$$

1. Vérifier que $(1 - 3i)^2$ est le discriminant de (E) .
2. Déterminer z_1 et z_2 , les racines de l'équation (E) . (On prend z_1 imaginaire pur).
3. Montrer que $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$.

- Déterminer le nombre complexes f , affixe du point F , milieu du segment $[AB]$.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $(-\frac{\pi}{2})$.

Et soit c l'affixe du point C , image du point F par la rotation r .

- Montrer que $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

Soit D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$.

- Montrer que le nombre $\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right) \times \left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$ est réel, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.