AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 6-2-2 : Nombres complexes - Partie 2 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

XI- Exercices I

11-1/ Exercice 2-1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E)\ :\ \frac{1}{2}z^3-(1+i)z^2+2\,(1+i)z-4i=0$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E).

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points :

$$A\left(1+i\sqrt{3}\right)\ ;\ B\left(1-i\sqrt{3}\right)\ ;\ C\,(2i)$$

3. Montrer que $OA=OB$.

Soit D le milieu du segment $[AC]$.

4. Déterminer l'affixe du point D et une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{OD}}\right)$.
5. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Soit O' l'image de point O par la rotation R_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et B' l'image de point B par la rotation R_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

6. Déterminer les affixes des points O' et B'.

Soit I le milieu du segment $[OB]$.

7. Montrer que (AI) est une hauteur du triangle $AO'B'$.

11-2/ Exercice 2-2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E)\ :\ z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$$

1. Vérifier que le nombre $a=1+i\left(2-\sqrt{3}\right)$ est une solution de l'équation (E).
2. En déduire b la deuxième solution de (E).
3. Montrer que $a^2=4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.
4. Écrire a sous forme trigonométrique.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Soit T le cercle de diamètre $[AB]$.

5. Déterminer ω l'affixe de Ω centre du cercle T.
6. Montrer que les points O et C appartiennent à T.
7. Montrer que le nombre $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

11-3/ Exercice 2-3

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E)\ :\ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$$

1. Vérifier que $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$ est le discriminant de (E).
2. Déterminer a et b solutions de l'équation (E) (sachant que $b\in\mathbb{R}$).
3. Vérifier que $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe a, et B le point d'affixe b.

4. Déterminer le nombre complexe b_1, affixe du point B_1, image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
5. Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.
6. Vérifier que $arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

Soit C le point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit du triangle OAB et différent de O et A.

7. Déterminer un argument du nombre $\frac{c}{c-a}$.

11-4/ Exercice 2-4

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E)\ :\ z^2-(1+i)z+2+2i=0$$

1. Vérifier que $(1-3i)^2$ est le discriminant de (E).
2. Déterminer z_1 et z_2, les racines de l'équation (E). (On prend z_1 imaginaire pur).
3. Montrer que $\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points $A\left(z_1\right)$ et $B\left(z_2\right)$.

4. Déterminer le nombre complexes f, affixe du point F, milieu du segment $[AB]$.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Et soit c l'affixe du point C, image du point F par la rotation r.

5. Montrer que $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

Soit D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$.

6. Montrer que le nombre $\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right) \times \left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$ est réel, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.